السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الأعداد العقدية	فروض النجاح استعدادا لاجتياز فروضك

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي ـ مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 : نعتبر في C المعادلة : $(E):\ z^2-2\boldsymbol{i}z-\boldsymbol{i}-1=0$

1) حل في C المعادلة (E)

2) اكتب على الشكل المثلثي a و b حلي المعادلة (E) ($\mathrm{Img}(a)>0$)

3) أ) تحقق أن : $\left|\frac{b}{a}\right|=\tan\frac{®}{8}$

ب) استنتج حساب $\tan\frac{®}{8}$

4) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط : $A(a)$ و $B(b)$ و $C(\boldsymbol{i})$ و $D(-1)$ و $P(p)$ (مع $p\in C$)

أ) تحقق أن C منتصف $[AB]$

ب) بين أن المثلث OAB قائم الزاوية في O

ج) بين أن النقط A و B و D مستقيمية

د) حدد العدد العقدي p علما أن : $|\boldsymbol{i}\,p+1|=|p|=1$

تمرين 2 : في المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$

ونعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة $M(z)$ من $(P)\setminus(O,\vec{v})$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z'=\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}z$

1) بين أن f لا يقبل أي نقطة صامدة

2) حدد (K) مجموعة النقط $M'(z')$ حيث $z'=0$

3) حدد (P) مجموعة النقط $M'(z')$ حيث $|z'|=|z|$

4) بين أن المستقيم له اتجاه ثابت يجب تحديده

5) بين أن : $(OM)\perp(OM')$

6) اعط طريقة هندسية لإنشاء النقطة M' انطلاقا من النقطة M

7) نفرض أن : $z=r\,e^{¯ i}$ حيث $r\in IR^{*+}$ و $® < ¯ < \frac{®}{2}$ ، اكتب z' على الشكل المثلثي

تمرين 3 : نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$

حيث a و b و c أعداد عقدية مختلفة مثنى مثنى

ليكن F التطبيق الذي يربط كل نقطة $M(z)$ من (P) بالنقطة $M'(z')$ حيث $z'=wz+a-aw$. $\left(w\in C^*\right)$

1) حدد طبيعة التطبيق و عناصره المميزة في الحالات التالية : $w=5$ ، $w=1$ ، $w=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$

2) نأخذ فيما يلي : $w=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$ ونعتبر النقط $M(m)$ و $N(n)$ و $P(p)$ حيث : $M=F(B)$ و $C=F(N)$ و $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$

أ) احسب m بدلالة a و b

ب) تحقق أن $\frac{w-1}{w}=w$ ثم استنتج أن : $n=w(a-c)+c$

ج) احسب p بدلالة a و b و c

د) بين أن PBC مثلث متساوي الأضلاع

فروض النجاح استعدادا لاجتياز فروضك	الأعداد العقدية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي ـ مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 : $(E):\ z^2-2\boldsymbol{i}z-\boldsymbol{i}-1=0$

1

لدينا : $\Delta=-4+4(\boldsymbol{i}+1)=4\boldsymbol{i}=2(2\boldsymbol{i})=2(1+\boldsymbol{i})^2=\left(\sqrt{2}(1+\boldsymbol{i})\right)^2$

منه : $z_1=a=\dfrac{2\boldsymbol{i}+\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\boldsymbol{i}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}+\left(2+\sqrt{2}\right)\boldsymbol{i}}{2}$ و $z_2=b=\dfrac{2\boldsymbol{i}-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,\boldsymbol{i}}{2}=\dfrac{-\sqrt{2}+\left(2-\sqrt{2}\right)\boldsymbol{i}}{2}$

بالتالي : $S=\left\{\dfrac{\sqrt{2}+\left(2+\sqrt{2}\right)\boldsymbol{i}}{2}\,;\,\dfrac{-\sqrt{2}+\left(2-\sqrt{2}\right)\boldsymbol{i}}{2}\right\}$

2

$$a=\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}\,\boldsymbol{i}}{2}=e^{\frac{\pi}{2}i}+e^{\frac{\pi}{4}i}=e^{\frac{3\pi}{8}i}\left(e^{\frac{\pi}{8}i}+e^{\frac{-\pi}{8}i}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{3\pi}{8}i}=\left[2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right);\frac{3\pi}{8}\right]$$

$$b=\boldsymbol{i}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}\,\boldsymbol{i}}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}i}-e^{\frac{\pi}{4}i}=e^{\frac{3\pi}{8}i}\left(e^{\frac{\pi}{8}i}-e^{\frac{-\pi}{8}i}\right)=2\boldsymbol{i}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{3\pi}{8}i}$$

$$b=2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{\pi}{2}i}e^{\frac{3\pi}{8}i}=\left[2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right);\frac{7\pi}{8}\right]$$

3

أ) تحقق أن : $\left|\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}=\tan\dfrac{\pi}{8}$

ب)

$$\tan\frac{\pi}{8}=\left|\frac{b}{a}\right|=\frac{|b|}{|a|}=\frac{\sqrt{\dfrac{2+\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{4}}}{\sqrt{\dfrac{2+\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{4}}}=\sqrt{\frac{2+4-4\sqrt{2}+2}{2+4+4\sqrt{2}+2}}$$

$$\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{4-2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1$$

4

$A(a)$ و $B(b)$ و $C(\boldsymbol{i})$ و $D(-1)$ و $P(p)$ (مع $p\in C$)

أ) لدينا : $\dfrac{z_A+z_B}{2}=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{2\boldsymbol{i}}{2}=\boldsymbol{i}=z_C$ منه : C منتصف $[AB]$

ب) لدينا : $\dfrac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=\dfrac{b}{a}=\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)e^{\frac{7\pi}{8}i-\frac{3\pi}{8}i}=\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)e^{\frac{\pi}{2}i}=\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\boldsymbol{i}$ منه : $\dfrac{z_B-z_O}{z_A-z_O}\in\boldsymbol{i}IR$

بالتالي المثلث OAB قائم الزاوية في O

ج) لدينا :

$$\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}=\frac{b+1}{a+1}=\frac{\dfrac{-\sqrt{2}+\left(2-\sqrt{2}\right)\boldsymbol{i}}{2}+1}{\dfrac{\sqrt{2}+\left(2+\sqrt{2}\right)\boldsymbol{i}}{2}+1}=\frac{2-\sqrt{2}+\left(2-\sqrt{2}\right)\boldsymbol{i}}{2+\sqrt{2}+\left(2+\sqrt{2}\right)\boldsymbol{i}}=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)(1+\boldsymbol{i})}{\left(2+\sqrt{2}\right)(1+\boldsymbol{i})}=\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

منه : $\dfrac{z_B-z_D}{z_A-z_D}\in IR$ بالتالي أن النقط A و B و D مستقيمية

لاحظ أن الشكل الجبري هذه المرة هو مفتاح الحل، لذلك يجب دائما محاولة استعمال الشكلين الجبري و الهندسي في الأسئلة للتعرف على الشكل الذي سيفي بالغرض.

د) طريقة 1

$|\boldsymbol{i}\,p+1|=|p|=1\ \Leftrightarrow\ |\boldsymbol{i}(p-\boldsymbol{i})|=|p|=1\ \Leftrightarrow\ |p-\boldsymbol{i}|=|p|=1\ \Leftrightarrow\ CP=OP$

إذن P هي إحدى نقطتي تقاطع الدائرتين $(O;1)$ و $(C;1)$ ،

و بما أن : $OC=1$ فإن المثلث OCP مثلث متساوي الأضلاع

طريقة 2	بعد إنشاء شكل بسيط نجد أن : $p=\left[1;\frac{\pi}{6}\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ أو $p=\left[1;\frac{5\pi}{6}\right]=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$
	$\lvert i\,p+1\rvert=\lvert p\rvert=1 \Leftrightarrow \begin{cases} p\,\overline{p}=1 \\ (i\,p+1)(-i\,\overline{p}+1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p\,\overline{p}=1 \\ p\,\overline{p}+i\,p-i\,\overline{p}+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p\,\overline{p}=1 \\ i\,p-i\,\overline{p}+1=0 \end{cases}$ $\lvert i\,p+1\rvert=\lvert p\rvert=1 \Leftrightarrow \begin{cases} p\,\overline{p}=1 \\ i\,p^2-i\,\overline{p}\,p+p=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p\,\overline{p}=1 \\ i\,p^2+p-i=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p\,\overline{p}=1 \\ p^2-i\,p-1=0 \end{cases}$ $\Delta=-1+4=3 \Rightarrow p=\frac{i+\sqrt{3}}{2}\ ou\ p=\frac{i-\sqrt{3}}{2}$
	أحيانا الحل الهندسي يكون أبسط

<u>تمرين 2</u> : في المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$

ونعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة $M(z)$ من $(P)\setminus(O,\vec{v})$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z'=\frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}z$

1	$z\neq 0 \Leftarrow M\in(P)\setminus(O,\vec{v})$ منه : $z'=z \Rightarrow \frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}z=z \Rightarrow \frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}=1 \Rightarrow z-\overline{z}=z+\overline{z} \Rightarrow \overline{z}=0 \Rightarrow z=0$ و هذا غير ممكن، بالتالي f لا يقبل أي نقطة صامدة
2	$z'=0 \Leftrightarrow \frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}z=0 \Leftrightarrow z=\overline{z} \Leftrightarrow z\in IR$ ، بالتالي (K) هو المحور الحقيقي محروم من النقطة O
3	نضع $z=x+i\,y$ حيث : $(x,y)\in IR^2$ $\lvert z'\rvert=\lvert z\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}z\right\rvert=\lvert z\rvert \Leftrightarrow \lvert z-\overline{z}\rvert=\lvert z+\overline{z}\rvert \Leftrightarrow \lvert 2\,i\,y\rvert=\lvert 2\,x\rvert \Leftrightarrow \lvert y\rvert=\lvert x\rvert \Leftrightarrow y=x\ ou\ y=-x$ إذن (P) هو اتحاد المستقيمين $(\Delta_1): y=x$ و $(\Delta_2): y=-x$ محروم من النقطة O
4	لدينا : $z'-z=\frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}z-z=\left(\frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}-1\right)z=\frac{-2\,\overline{z}}{z+\overline{z}}z=\frac{-2\,z\,\overline{z}}{z+\overline{z}}\in IR$ ما يعني أن $z'-z=\frac{-2\,z\,\overline{z}}{z+\overline{z}}\times 1=\frac{-2\,z\,\overline{z}}{z+\overline{z}}z_{\vec{u}}$ أي أن $\overrightarrow{MM'}$ و $\vec{u}$ مستقيميتان أي أن المستقيم (MM') له اتجاه ثابت هو اتجاه المحور الحقيقي
5	لدينا : $\frac{z'}{z}=\frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}=\frac{y}{x}i\ \in i\,IR$ منه $(OM)\perp(OM')$
6	إذا كانت M نقطة من المحور الحقيقي فإن $M'=O$ إذا كانت M نقطة خارج المحور الحقيقي، فإن M' خي نقطة تقاطع المستقيم المار من M و الموازي للمحور الحقيقي مع المستقيم المار من O و العمودي على (OM)
7	$z'=\frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}z=\frac{r\,e^{\theta i}-r\,e^{-\theta i}}{r\,e^{\theta i}+r\,e^{-\theta i}}r\,e^{\theta i}=r\frac{2\,i\sin\theta}{2\cos\theta}e^{\theta i}=r\tan\theta\,e^{\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)i}=r\,(-\tan\theta)e^{\left(\theta+\frac{\pi}{2}+\pi\right)i}$ $z'=\left[-r\tan\theta\ ;\ \theta+\frac{3\pi}{2}\right]$
	$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi \Rightarrow \tan\theta<0$ و هذا سبب إدراج الإشارة لأن الشكل الهندسي يتوجب أن يكون المعيار موجبا

<u>تمرين 3</u> : $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ ، $M(z)$ ، $M'(z')$ / $M'=F(M)$ $(w\in C^*)$ $z'=w\,z+a-aw$

1	▪ الحالة : $w=5$ ، $z'=5\,z-4a$ F هو تحاك نسبته 5 و مركزه هي النقطة الصامدة أي النقطة ذات اللحق : a أي النقطة A ▪ الحالة : $w=1$ ، $z'=z$ ، F هو التطبيق المطابق ▪ الحالة : $w=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z'=e^{\frac{\pi}{3}i}\,z+a-ae^{\frac{\pi}{3}i}$ أي : $z'-a=e^{\frac{\pi}{3}i}\,(z-a)$

2		F هو الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\text{®}}{3}$	
		$w=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$ ، $M(m)$ و $N(n)$ و $P(p)$ ، $M=F(B)$ ، $C=F(N)$ ، $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$	
	أ)	$M=F(B) \Rightarrow m=wb+(1-w)a$	
	ب)	لدينا : $w^2-w+1=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}+1=0$ منه : $w^2=w-1$ منه : $\frac{w-1}{w}=w$ لدينا $C=F(N)$ منه : $c=w(n-a)+a=wn+(1-w)a$ منه : $n=\frac{c-(1-w)a}{w}=\frac{c-wc+wc}{w}+\frac{w-1}{w}a=\frac{(1-w)c}{w}+c+wa=-wc+c+wa=w(a-c)+c$	
	ج)	لدينا : $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$ منه : $p-a=m-a+n-a$ منه : $p=m+n-a=wb+(1-w)a+w(a-c)+c-a=wb+(1-w)c$	
	د)	لدينا $p=wb+(1-w)c=w(b-c)+c$ منه : $P=R\left(C,\frac{\text{®}}{3}\right)(B)$ بالتالي PBC مثلث متساوي الأضلاع	