فرض محروس رقم 3

التمرين الأول

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0=1$ و $U_{n+1}=U_n+\frac{1}{U_n}$

1) بين أنّ $U_n\geq 1 \quad (\forall n\in\mathbb{N})$ و بين أنّ المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

2) أ- بين أنّ $2\leq U_{n+1}^2-U_n^2\leq 2+U_{n+1}-U_n \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

ب- استنتج أنّ $2n\leq U_n^2-1\leq 2n-1+U_n \quad (\forall n\in\mathbb{N})$ و حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

3) بين أنّ $1-\frac{1}{U_n}\leq\frac{2n}{U_n^2}\leq 1-\frac{1}{U_n^2} \quad (\forall n\in\mathbb{N})$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2n}}{U_n}$

التمرين الثاني

I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي : $f(x)=\sqrt{\sin x}$

1) أدرس منحى تغيرات الدالة f

2) أ- بين أنّ f تقابل من $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ نحو $[0,1]$ و لتكن g تقابله العكسي

ب- أرسم المنحنيين (C_f) و (Γ_g) في نفس المعلم السابق

3) بين أنّ g قابلة للإشتقاق على $]0,1[$ و أنّ $g'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

II) لتكن φ الدالة المعرفة على $[0,1]$ بما يلي : $\varphi(x)=\sqrt[4]{1-x^4}$

و نضع $h(x)=(g\circ\varphi)(x)$

1) أ- حدد مجموعة قابلية اشتقاق الدالة φ و أحسب مشتقتها

ب- بين أنّ h قابلة للإشتقاق على $]0,1[$ و أنّ $h'(x)=-g'(x)$

ج- أحسب $h(0)$ و استنتج أنّ $h(x)=\frac{\pi}{2}-g(x) \quad (\forall x\in[0,1])$

III) نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ بحيث : $U_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}h\left(\frac{k}{n^2}\right)$

1) بين أنّ $h\left(\frac{1}{n}\right)\leq h\left(\frac{k}{n^2}\right)\leq h\left(\frac{1}{n^2}\right)$ لكل عدد طبيعي k من $\{1;2;.....;n\}$

2) استنتج أنّ المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثالث

لكل عدد عقدي z من $\mathbb{C}-\{1+i\}$ نضع $f(z)=\frac{(1+i)z}{2-(1-i)z}$

1) أ- بين أنّ $\overline{f(z)}=f(z) \Leftrightarrow z-\bar{z}+i(z+\bar{z})=2iz\bar{z}$

ثم حدد المجموعة $(C)=\{M(z)/\ f(z)\in\mathbb{R}\}$

ب- تحقق أنّ $f(z)=\frac{iz}{1+i-z}$

ثم حدد المجموعة $(D)=\{M(z)/\ |f(z)|=1\}$

ج- لتكن A النقطة ذات اللحق $1+i$.

بين أنّ : $arg(f(z))\equiv(\overline{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}})-\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$

ثم استنتج المجموعة $(\Gamma)=\{M(z)/\ \arg(f(z))\equiv 0\quad[2\pi]\}$

التمرين الرابع

1) ليكن u عدد من $\mathbb{C}$ معياره 1 و x عدد حقيقي بين أنّ $|x-u|=|1-xu|$

2) بين أنّ $|z|+|z'|\leq|z+z'|+|z-z'|$ لكل عددين عقديين z و z'