ليكن $n$ عددا طبيعيا من $\mathbb{N}^*$ . نعتبر الدالة العددية $f_n$ المعرفة بما يلي $f_n(x)=(1-x)^n e^{2x}$ و ليكن $(C_n)$ منحنى الدالة $f_n$ في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ بحيث : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\,cm$

$(I)$ 1) بين أن $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=0$ و أحسب النهاية $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$

2) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(C_n)$ عند $+\infty$

3) أحسب $f_n'(x)$ و أنجز جدول تغيرات كل من الدالتين $f_1$ و $f_2$

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(C_1)\ ;\ (C_2)$ و أرسمهما

$(II)$ نعتبر الدالة $F$ المعرفة على $]-\infty,0]$ بما يلي : $F(x)=\int_x^0 \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}\,dt$

1) أ- بين أن الدالة $F$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0]$

و أن $F'(x)=\frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

ب- أدرس منحى تغيرات الدالة $F$

2) أ- بين أن $\frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)\,dt \le F(x) \le \frac{1}{1+e^{2x}}\int_x^0 f_1(t)\,dt$ $(\forall x<0)$

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\int_x^0 f_1(t)\,dt=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{3}{4}e^{2x}$

ج- نقبل أن $F(x)$ تقبل نهاية $l$ عند $-\infty$ بين أن $\frac{3}{8}\le l\le\frac{3}{4}$

$(III)$ نضع $U_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$ لكل عددا طبيعيا $n$ من $\mathbb{N}^*$

1) أ- بين أن $U_n>0$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب- أدرس إشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ على المجال $[0,1]$

ج- استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ تناقصية

2) أ- بين أن $U_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}U_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب- استنتج ب $cm^2$ مساحة الحيز $(\Delta)$ المحصور بين المنحنيين $(C_1)\ ;\ (C_2)$ و المستقيمين $x=0\ ;\ x=1$

3) بين أن $\frac{1}{n+1}\le U_n\le\frac{1}{n-1}$ $(\forall n\ge 2)$ و حدد $\lim_{n\to+\infty} U_n\ ;\ \lim_{n\to+\infty} nU_n$

4) ليكن $a$ عددا حقيقيا موجبا و بحيث $a\ne U_1$ .

نعتبر المتتالية $(V_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$V_1=a$ و $V_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}V_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ثم نضع $d_n=|V_n-U_n|$

أ- بين أن $d_n=\frac{n!}{2^{n-1}}d_1$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ و بين أن $\lim_{x\to+\infty} d_n=+\infty$

ب- بين أن المتتالية $(V_n)_n$ متباعدة

$(IV)$ نضع $W_n=\frac{2^n}{n!}U_n$ لكل عدد طبيعي $n$ من $\mathbb{N}^*$

1) أ- بين أن $\frac{2^{n-1}}{n!}\le 1$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب- بين أن $W_n\le\frac{2e^2}{n+1}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ و استنتج أن $\lim_{n\to+\infty} W_n=0$

2) أ- بين أن $W_{n+1}=-\frac{2^n}{(n+1)!}+W_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب- أحسب مشتقة الدالة $x\to\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}$ و بين أن $W_1=\frac{1}{2}\left(e^2-3\right)$

ج- بين أن $W_n=\frac{1}{2}\left(e^2-\sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right)$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

د- استنتج النهاية $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}$

| من إنجاز التلميذة: جهاد المرلوزي | حل الفرض المحروس رقم ① للأسدس الثاني | تحت إشراف الأستاذ: بوشعيب المانني |
|---|---|---|

## I-

1- * لنبين أن $\lim_{x\to-\infty} f_m(x)=0$

نضع $x = tm$

إذن $x \longrightarrow -\infty \Rightarrow t \longrightarrow -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim_{x\to-\infty} (1-x)^m e^{2x}$$
$$= \lim_{t\to-\infty} (1-tm)^m e^{2tm}$$
$$= \lim_{t\to-\infty} \left((1-tm)e^{2t}\right)^m$$
$$= \lim_{t\to-\infty} \left(e^{2t} - \frac{m}{2}(2te^{2t})\right)^m$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = 0}$$

[لأن $\lim_{t\to-\infty} e^{2t} = \lim_{t\to-\infty} 2te^{2t} = 0$]

* لنحسب النهاية $\lim_{x\to+\infty} f_m(x)$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim_{x\to+\infty} (1-x)^m e^{2x}$

إذا كان $m$ زوجي

لدينا $\lim_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$

وعليه $\lim_{x\to+\infty} (1-x)^m = +\infty$

ونعلم $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$

إذن

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = +\infty}$$

إذا كان $m$ فردي:

لدينا $\lim_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$

وعليه $\lim_{x\to+\infty} (1-x)^m = -\infty$

نعلم أن: $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = -\infty$$

2) الفرع النهائي للمنحنى $(C_m)$ عند $+\infty$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = \infty$

لنحسب $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_m(x)}{x}$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-x)^m e^{2x}}{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} (1-x)^m \times 2 \times \frac{e^{2x}}{2x}$$

إذا كان $m$ زوجي

لدينا $\lim_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$

إذن $\lim_{x\to+\infty} (1-x)^m = +\infty$

ونعلم $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = +\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f_m(x)}{x} = +\infty}$$

إذا كان $m$ فردي

$\lim_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} (1-x)^m = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = +\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f_m(x)}{x} = -\infty}$$

$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \infty$

$\Leftarrow$ $(C_m)$ يقبل فرع شلجمي باتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

3- حساب $f'_m(x)$

$$f'_m(x) = \left((1-x)^m e^{2x}\right)'$$

$f_n'(x) = -n(1-x)^{n-1}e^{2x} + 2(1-x)^n e^{2x}$

$f_n'(x) = (1-x)^{n-1}e^{2x}\left(-n+2(1-x)\right)$

$$\boxed{f_n'(x) = (1-x)^{n-1}e^{2x}(2-2x-n)}$$

بالنسبة للدالة $f_1$

$f_1'(x) = (1-x)^0(2-2x-1)e^{2x}$
$= (1-2x)e^{2x}$

جدول التغيرات.

| $x$ | $-\infty$   $0$   $\frac{1}{2}$   $1$   $+\infty$ |
|---|---|
| $f_1'(x)$ | $+$   $0$   $-$ |
| $f_1(x)$ | $0$ ↗ $\frac{e}{2}$ ↘ $-\infty$ |

بالنسبة للدالة $f_2$

$f_2'(x) = (1-x)e^{2x}(2-2x-2)$
$= -2x(1-x)e^{2x}$

$$\boxed{f_2'(x) = 2x(x-1)e^{2x}}$$

جدول التغيرات.

| $x$ | $-\infty$   $0$   $1$   $+\infty$ |
|---|---|
| $f_2'(x)$ | $+$   $0$   $-$   $0$   $+$ |
| $f_2(x)$ | $0$ ↗ $1$ ↘ $0$ ↗ $+\infty$ |

4- لندرس الوضع النسبي للمنحنيين $(C_1)$ و $(C_2)$.

$f_2(x) - f_1(x) = (1-x)^2 e^{2x} - (1-x)e^{2x}$

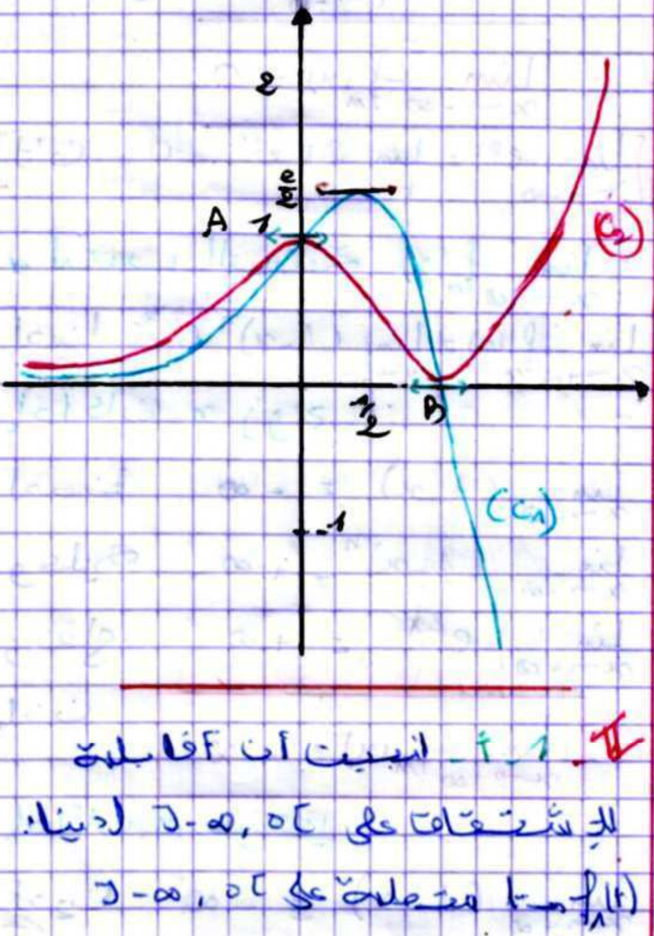
$f_2(x) - f_1(x) = (1-x)e^{2x}(1-x-1)$
$= x(x-1)e^{2x}$

$f_2(x) - f_1(x) = x(x-1)e^{2x}$

| $x$ | $-\infty$   $0$   $1$   $+\infty$ |
|---|---|
| $f_2(x)-f_1(x)$ | $+$   $0$   $-$   $0$   $+$ |
| الوضع النسبي لـ $(C_2)$ و $(C_1)$ | $C_2$ فوق $C_1$   A   $C_2$ تحت $C_1$   B   $C_2$ فوق $C_1$ |

بحيث: $A(0,1)$   $B(1,0)$

إنشاء المنحنيين $C_1$ و $C_2$.




II- 1- أ- لنبين أن F قابلة للإشتقاق على $]-\infty, 0[$ لدينا:

$t \mapsto f_1(t)$ متصلة على $]-\infty, 0[$

$t \mapsto \frac{1}{1+e^{2t}}$ متصلة على $]-\infty, 0[$

إذن $t \mapsto \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}$ متصلة على $]-\infty, 0[$

إذن $\frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}$ تقبل دالة أصلية G

حيث $F(x) = G(0) - G(x)$

ولدينا $f_1(t)$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0]$

و $\frac{1}{1+e^{2t}}$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0]$

إذن $\frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0]$

وعليه فإن $G(x)$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0]$

إذن $F(x)$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0]$

* لنثبت أن $F'(x) = \frac{(1-x)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

لدينا $F'(x) = -G'(x)$

إذن $= -\frac{f_1(x)}{1+e^{2x}}$

وعليه $= -\frac{(1-x)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

$$\boxed{F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}}$$

ب- لندرس اتجاه تغيرات الدالة $F$

لدينا $x \in ]-\infty,0[$

$x<0 \Rightarrow x-1<-1<0$

$x<0 \Rightarrow e^{2x}>1>0$

$\Rightarrow e^{2x}+1>0$

إذن $F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}} < 0$

$\Leftarrow$ $F$ متناقصة قطعا على $]-\infty,0]$

2-أ- لنبين أن $\frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}}\int_x^0 f_1(t)dt$

لدينا

$x<t<0 \Rightarrow 2x<2t<0$

$x<t<0 \Rightarrow e^{2x} < e^{2t} < e^0 = 1$

$\Rightarrow 1+e^{2x} < 1+e^{2t} < 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{1+e^{2t}} < \frac{1}{1+e^{2x}}$

ولدينا $x<t<0 \Rightarrow f(t)>0$

حسب جدول التغيرات.

إذن $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+e^{2t}} \leq \frac{1}{1+e^{2x}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} f_1(t) \leq \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}} \leq \frac{f_1(t)}{1+e^{2x}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)dt \leq \int_x^0 \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}dt \leq \int_x^0 \frac{f_1(t)dt}{1+e^{2x}}$

$$\boxed{\frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}}\int_x^0 f_1(t)dt}$$

ب-

لدينا $\int_x^0 f_1(t)dt = \int_x^0 (1-t)e^{2t}dt$

$= \left[(1-t)\times\frac{1}{2}e^{2t}\right]_x^0 - \int_x^0 -\frac{1}{2}e^{2t}$

$= \left[\frac{(1-t)}{2}e^{2t}\right]_x^0 + \int_x^0 \frac{1}{2}e^{2t}dt$

$= \left[\frac{(1-t)}{2}e^{2t}\right]_x^0 - \left[\frac{1}{4}e^{2t}\right]_x^0$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$

$$\boxed{\int_x^0 f_1(t)dt = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x}}$$

ج- نضع $\lim_{x\to-\infty} F(x) = l$

لدينا $\lim_{x\to-\infty} \int_x^0 f_1(t)\,dt$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{4} - \frac{2}{4}xe^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x}$$

$$= \frac{3}{4}$$

[لأن $\lim_{x\to-\infty} 2x e^{2x} = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$]

ونعلم أن

$$\frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1-e^{x}}\int_x^0 f_1(t)dt$$

حسب خاصيات النهايات والترتيب

نجد

$$\boxed{\frac{3}{8} \leq l \leq \frac{3}{4}}$$

III - 1- أ- لنبين أن $u_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

لدينا $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0$$

$$\Rightarrow 1-x \geq 0 \text{ و } e^{2x} > 0$$

$$\Rightarrow (1-x)^n e^{2x} \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1-x)^n e^{2x}\,dx > 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f_n(x)\,dx > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

ب- لندرس إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على $[0,1]$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = (1-x)^{n+1}e^{2x} - (1-x)^n e^{2x}$$

$$= (1-x)^n e^{2x}(1-x-1)$$

$$= -x(1-x)^n e^{2x}$$

لدينا $0 \leq x \leq 1$

يعني أن $-x \leq 0$ و $e^{2x} \geq 0$ و $(1-x)^n \geq 0$

إذن $\boxed{\forall x \in [0,1] \quad f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0}$

ج- لنستنتج أن $(u_n)_n$ تناقصية

لدينا $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$$

$$\int_0^1 f_{n+1}(x) \leq \int_0^1 f_n(x)$$

$$\boxed{u_{n+1} \leq u_n}$$

إذن $u_n$ متتالية تناقصية.

2- أ- لنبين أن $u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}u_n$

نضع $u : x \to (1-x)^{n+1}$

$v : x \to \frac{1}{2}e^{2x}$

$u$ و $v$ متصلتين على $[0,1]$

$u$ و $v$ قابلتين للإشتقاق على $[0,1]$

$u'$ و $v'$ متصلتين على $[0,1]$

لدينا $u_{n+1} = \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{2x}\,dx$

$$= [u(x)\,v(x)]_0^1 - \int_0^1 v(x)\,u'(x)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}\int_0^1 (1-x)^n e^{2x}$$

$$\boxed{u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}u_n}$$

ب- مساحة الحيز المحصور بين $(C_1)$ و $(C_2)$ والمستقيمين $x=0$ و $x=1$

$$S = \int_0^1 |f_2(x) - f_1(x)|\,dx \; u.a$$

$$= \int_0^1 f_1(x) - f_2(x)\,dx \; u.a$$

$$= \int_0^1 f_1(x)\,dx - \int_0^1 f_2(x)\,dx \; u.a$$

$$= (u_1 - u_2) \; u.a$$

إذن $S = u_1 - u_2$

وحسب السؤال (2.أ) نعلم أن

$u_2 = -\frac{1}{2} + u_1 \Rightarrow -u_2 + u_1 = \frac{1}{2}$

$S = \frac{1}{2}\, u.a = \frac{1}{2}\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|$

وعليه $\boxed{S = 2\,cm^2}$

3- لنبين أن $\frac{1}{n+1} \le u_n \le \frac{1}{n-1}$

لدينا حسب الأسئلة 1-أ و 1-ج و 2-أ

$0 \le u_{n+1} \le u_n \Rightarrow 0 \le -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} u_n \le u_n$

$\frac{1}{2} \le \frac{n+1}{2} u_n$ و $-\frac{1}{2} \le \left(1 - \frac{n+1}{2}\right) u_n$

إذن $\frac{1}{n+1} \le u_n$ و $u_n \le \frac{1}{n-1}$

$\boxed{\frac{1}{n+1} \le u_n \le \frac{1}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

ب- تحديد $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

بما أن $\frac{1}{n+1} \le u_n \le \frac{1}{n-1}$

ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1} = 0$

إذن $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

ولدينا $\frac{n}{n+1} \le n u_n \le \frac{n}{n-1}$

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1}$

$= 1$

فإن $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n = 1}$

4- من أجل $n=1$: $d_1 = \frac{1!}{2^0} d_1$

علاقة صحيحة

نفترض أن $d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1$

لنبين أن $d_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^n} d_1$

لدينا $d_{n+1} = |v_{n+1} - u_{n+1}|$

$= \left|-\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} v_n + \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2} u_n\right|$

$= \left|\frac{n+1}{2} v_n - \frac{n+1}{2} u_n\right|$

$= \frac{n+1}{2} |v_n - u_n|$

إذن $= \frac{n+1}{2} d_n$

ولدينا $d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1$

$\frac{n+1}{2} d_n = \frac{(n+1)\, n!}{2 \times 2^{n-1}} d_1$

$d_{n+1} = \frac{(n+1)}{2^n} d_1$

وعليه فإن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1}$

لنبين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = +\infty$

نعلم أن $d_{n+1} = \frac{n+1}{2} d_n$

ولدينا $\frac{n+1}{2} > 2$

إذن $\forall n \ge 3 \quad d_{n+1} \ge 2 d_n$

أي $\frac{d_{n+1}}{d_n} \ge 2$

ومنه فإن $\forall n \ge 3$

$\frac{d_n}{d_{n-1}} \times \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}} \times \dots \frac{d_4}{d_3} \ge 2^{n-3}$

إذن $\frac{d_n}{d_3} \geq 2^{n-3}$

أي $\forall n \geq 3 \quad d_n \geq d_3 \times 2^{n-3}$

بما أن $2 > 1$

$\lim_{n\to+\infty} 2^{n-3} d_3 = +\infty$

وحسب مصاديق التقارب

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} d_n = +\infty}$$

ب- نفترض أن $(V_n)_{n\geq1}$ متتالية متقاربة نعلم أن $(U_n)_{n\geq1}$ متقاربة ولدينا $d_n = |V_n - U_n|$ إذن $d_n$ متقاربة وهذا تناقض

إذن $(V_n)_{n\geq1}$ متتالية متباعدة.

IV - 1-أ. من أجل $n = 1$

$\frac{2^0}{1!} \leq 1$

علاقة صحيحة

نفترض أن $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$

لنبين أن $\frac{2^n}{(n+1)!} \leq 1$

$n \geq 1 \Rightarrow n+1 \geq 2$

$\Rightarrow \frac{2}{n+1} \leq 1$

ولدينا $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$

إذن $\frac{2 \times 2^{n-1}}{n!(n+1)} \leq 1$

وعليه $\frac{2^n}{(n+1)!}$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$

1- ب. لنبين أن $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$W_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$

لدينا $W_n = \frac{2^n}{n!} U_n$

و $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1 \Rightarrow W_n \leq 2U_n$

مع $U_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{2x} dx$

ولدينا $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow e^{2x} \leq e^2$

ونعلم أن $(1-x)^n \geq 0$

إذن $(1-x)^n e^{2x} \leq (1-x)^n e^2$

$U_n \leq e^2 \int_0^1 (1-x)^n dx$

$U_n \leq e^2 \left[\frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1$

إذن $U_n \leq \frac{e^2}{n+1}$

$$\Rightarrow \boxed{W_n \leq \frac{2e^2}{n+1}}$$

لنستنتج أن $\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$

لدينا $0 \leq W_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{2e^2}{n+1} = 0$

إذن حسب خاصيات النهايات والترتيب

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} W_n = 0}$$

2-1. لنبين أن

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad W_{n+1} = \frac{2^n}{(n+1)!} + W_n$

لدينا $W_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} U_{n+1}$

$W_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\left(-\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} U_n\right)$

$W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + \frac{2^{n+1}(n+1)}{(n+1)n!\times 2} U_n$

$W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + \frac{2^n}{n!} U_n$

$= -\frac{2^n}{(n+1)!} + W_n$

إذن $\boxed{W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + W_n}$

ب- لنحسب مشتقة $\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}$

$\left(\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}\right)' = \left(\frac{3}{2}-x\right)'e^{2x} + \left(\frac{3}{2}-x\right)\left(e^{2x}\right)'$

$= -e^{2x} + 2\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}$

$= -e^{2x} + (3-2x)e^{2x}$

$= 2e^{2x}(1-x) = 2f_1(x)$

إذن $\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}$ هي دالة أصلية لـ $2f_1(x)$

نضع $V(x) = \left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}$

لدينا $W_1 = \frac{2}{1} U_1$

$= 2\int_0^1 f_1(x)\,dx$

$= \int_0^1 2f_1(x)\,dx = \left[V(x)\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}(e^2-3)$

$\boxed{W_1 = \frac{1}{2}(e^2-3)}$

ج- لنبين أن $W_n = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right)$

من أجل $n=1$ لدينا

$W_1 = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=1}\frac{2^k}{k!}\right)$

$= \frac{1}{2}(e^2-3)$ علاقة صحيحة

نفترض أن

$W_n = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right)$

لنبين $W_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n+1}\frac{2^k}{k!}\right)$

لدينا $W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + W_n$

حسب افتراض التراجع

$W_n = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right)$

$W_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right) - \frac{2^n}{(n+1)!}$

$W_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!} - \frac{2^n}{(n+1)!}\right)$

$W_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n+1}\frac{2^k}{k!}\right)$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $W_n = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n+1}\frac{2^k}{k!}\right)$

د- لنستنتج نهاية $\sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}$

لدينا $\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$

أي أن $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right) = 0$

إذن $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!} = e$

انتهى.