التمرين الأول

ليكن m عددا عقدي غير منعدم . نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(E) \quad m^2Z^2+m^3Z+1-im^2=0$$

1) أ- حل المعادلة (E) من أجل $m=-1$

ب- حدد قيم m التي يكون من أجلها $u=1+i$ حلا للمعادلة (E) ثم حدد الحل الآخر في كل حالة

2) أ- تحقق أن مميز المعادلة (E) يكتب $\Delta=m^2\left(m^2+2i\right)^2$

ب- حدد Z_1 , Z_2 حلي المعادلة (E)

3) المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر في (P) النقط A , B , M التي ألحاقها على التوالي هي :

$a=-m-\frac{i}{m}$, $b=\frac{i}{m}$, m و نضع $Z=\frac{m-a}{m-b}$

أ- بين أن $\left(\overline{Z}=Z\right) \Leftrightarrow \left(\arg(m)\equiv\frac{\pi}{4}\ [\pi] \text{ أو } \arg(m)\equiv-\frac{\pi}{4}\ [\pi]\right)$

ب- استنتج (Γ) مجموعة النقط $M(m)$ بحيث يكون A , B , M نقط مستقيمية

4) ليكن R الدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{2}$. نضع $A'=R(A)$ ،

$M'=R(M)$ و $B'=R^{-1}(M)$

أ- حدد a' لحق النقطة A' و بين أن لحق B' هو العدد $b'=-im+\frac{i-1}{m}$

ب- حدد m' لحق النقطة M' و بين أن B منتصف القطعة $[B'M']$

ج- ليكن I منتصف القطعة $[AM]$ و Z_I لحقها .

أحسب $\frac{b'-a'}{b-Z_I}$ و استنتج أن $(A'B')\perp(BI)$ و أن $A'B'=2BI$

التمرين الثاني

ليكن a ; b عددين من $\mathbb{Z}^*$ أوليين فيما بينهما . نضع $N=a^4+b^4$

1) بين أن $n^4\equiv 0\ [16]$ أو $n^4\equiv 1\ [16]$ لكل عدد n من $\mathbb{Z}$

2) استنتج أن $N\equiv 1\ [16]$ أو $N\equiv 2\ [16]$

3) ليكن p عددا طبيعيا أوليا أكبر أو يساوي 3 و قاسما للعدد N

أ- بين أن $p\wedge a=1$ و $p\wedge b=1$

ب- بين أن : $(\exists c\in\mathbb{Z})\ ac\equiv-1\ [p]$ و استنتج أن $(\exists x\in\mathbb{Z})\ x^4\equiv-1\ [p]$

ج- ليكن r باقي القسمة الأقليدية للعدد p على 8 .

(i) بين أن $x^{r-1}\equiv 1\ [p]$ $\qquad$ (ii) بين أن $r=1$

التمرين الثالث

ليكن n عددا من $\mathbb{N}^*$ و نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$f_n(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^{2n+1}$ و (C_n) هو المنحنى الممثل للدالة f_n في $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

(I) 1) أ- بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x(\ln x)^3=0$ و أحسب النهاية $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_1(x)$

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$

2) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^3}{x}=0$ و أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_1) عند $+\infty$

3) احسب المشتقة $f_1'(x)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f_1

4) بين أن المعادلة $f_1(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β_1 و أن $\beta_1\in\ ]2,e[$

5) أرسم المنحى (C_1) (نأخذ $\beta_1\simeq 2{,}2$)

(II) 1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x)$

2) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل في المجال $[1,e]$ حلا وحيدا نرمز له بالرمز β_n

3) أ- أدرس على المجال $[1,e]$ إشارة الفرق $f_{n+1}(x)-f_n(x)$

ب- بين أن المتتالية $(\beta_n)_{n\geq 1}$ تزايدية

4) أ- بين أن $\frac{-1}{2n}\leq\ln(\ln\beta_n)$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$

ب- استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=e$

تصحيح الفرض المحروس رقم ②

الأسدس II

التمرين I :

$(E) : m^2Z^2 + m^3Z + 1 - im^2 = 0$

① أ- من أجل $m = -1$

$(E) : z^2 - z + 1 - i = 0$

$\Delta = 1 - 4(1-i) = -3 + 4i$

$\Delta = (2i+1)^2$

ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E)

$z_1 = \frac{1-(2i+1)}{2} = -i$

$z_2 = \frac{1+(2i+1)}{2} = 1 + i$

ومنه: $\boxed{S = \{-i, 1+i\}}$

ب- لنحدد قيم m التي يكون من أجلها $u = 1+i$ حلا للمعادلة (E)

$\left(u = 1+i \text{ حل للمعادلة } (E)\right) \Leftrightarrow (E') : (1+i)m^3 + im^2 + 1 = 0$

لدينا: $m = -1$ حل للمعادلة (E')

ومنه:

$(E') \Leftrightarrow (m+1)\left((1+i)m^2 - m + 1\right) = 0$

لنحل المعادلة: $(1+i)m^2 - m + 1 = 0$

$\Delta = -3 - 4i = (2i-1)^2$

ومنه: $m = \frac{1-(2i-1)}{2(1+i)} = -i$

$m = \frac{1+(2i-1)}{2(1+i)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

وعليه قيم m التي من أجلها $u = 1+i$ حل للمعادلة (E) هي:

$m \in \left\{-1, -i, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$

في حالة $m = -1$ (u و u' حلا المعادلة (E))

$u = 1+i$ و $u' = -i$

في حالة $m = -i$

$(E) \Leftrightarrow -z^2 + iz + 1 + i = 0$

$u_2 = -i - u_1 = -1$

ومنه:

$u = 1+i$ و $u' = -1$

في حالة $m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$(E) \Leftrightarrow \frac{1}{2}iz^2 + \frac{1}{4}(1+i)Z + \frac{3}{2} = 0$

$u' = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 - i = -\frac{3}{4}(i+1)$

وعليه:

$u = 1+i$ و $u' = -\frac{3}{4}(i+1)$

② أ- لنتحقق أن مميز المعادلة (E) يكتب على الشكل:

$\Delta = m^2(m^2+2i)^2$

$\Delta = m^6 - 4(1-im^2)m^2$

$\Delta = m^2(m^4 - 4 + 4im^2)$

ومنه: $\Delta = m^2(m^2+2i)^2$

ب- ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E)

$z_1 = \frac{-m^3 - m(m^2+2i)}{2m^2} = -m - \frac{i}{m}$

$z_2 = \frac{-m^3 + m(m^2+2i)}{2m^2} = \frac{i}{m}$

③ أ-

$Z = \frac{m-a}{m-b} = \frac{m + m + \frac{i}{m}}{m - \frac{i}{m}} = \frac{2m^2+i}{m^2-i}$

$= \frac{2(m^2-i)+3i}{m^2-i} = 2 + \frac{3i}{m^2-i}$

$Z = \bar{Z} \Leftrightarrow 2 + \frac{3i}{m^2-i} = 2 - \frac{3i}{\bar{m}^2+i}$

$\Leftrightarrow \bar{m}^2 = -m^2$

$\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(m^2) = 0$

ومنه: $m^2 \in i\mathbb{R}$

إذن: $\arg(m^2) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ أو $\arg(m^2) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$2\arg(m) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ أو $2\arg(m) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

وعليه:

$\arg(m) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$ أو $\arg(m) \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]$

ب-

$\left(A \text{ و } B \text{ و } M \text{ نقط مستقيمية}\right) \Leftrightarrow \frac{m-a}{m-b} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow Z = \bar{Z}$

$\Leftrightarrow \arg(m) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$ أو $\arg(m) \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(m) = \mathrm{Im}(m)$ أو $\mathrm{Re}(m) = -\mathrm{Im}(m)$

نضع $m=x+yi$ (P) $(x,y\in\mathbb{R})$

ومنه: مجموعة النقط $M(m)$ التي تكون من أجلها A و B و M نقط مستقيمية هي اتحاد المستقيمين :

$(D_1): y=x.$

$(D_2)\ y=-x.$

④ . أ -

لدينا R دوران مركزه $B(\frac{i}{m})$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$A'=R(A) \Leftrightarrow a'=e^{i\frac{\pi}{2}}\left(a-\frac{i}{m}\right)+\frac{i}{m}$$

$$\Leftrightarrow a'=ai+\frac{1}{m}+\frac{i}{m}$$

$$\Leftrightarrow a'=-im+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\frac{i}{m}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a'=-im+\frac{i}{m}+\frac{2}{m}}$$

$$B'=R^{-1}(M) \Leftrightarrow R(B')=M$$

$$\Leftrightarrow e^{i\frac{\pi}{2}}\left(b'-\frac{i}{m}\right)+\frac{i}{m}=m$$

$$\Leftrightarrow b'-\frac{i}{m}=-im-\frac{1}{m}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{b'=-im+\frac{i-1}{m}}$$

ب -

$$M'=R(M) \Leftrightarrow m'-\frac{i}{m}=e^{i\frac{\pi}{2}}\left(m-\frac{i}{m}\right)$$

$$\Leftrightarrow m'=mi+\frac{i+1}{m}$$

لدينا :

$$\frac{b'+m'}{2}=\frac{-mi+\frac{i-1}{m}+mi+\frac{i+1}{m}}{2}$$

$$=\frac{2i}{2m}=\frac{i}{m}$$

$$=b$$

وعليه : $B(b)$ هي منتصف القطعة $[B'M']$

ج . ليكن I منتصف القطعة $[AM]$ و Z_I لاحقتها

$$Z_I=\frac{m+a}{2}=\frac{-i}{2m}$$

$$\frac{b'-a'}{b-z_I}=\frac{-im+\frac{i-1}{m}+im-\frac{i}{m}-\frac{2}{m}}{\frac{i}{m}+\frac{i}{2m}}$$

$$=\frac{-3}{m}\times\frac{2m}{3i}$$

$$=2i$$

$$(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{A'B'})\equiv\arg\left(\frac{b'-a'}{b-z_I}\right)[2\pi]$$

$$\equiv\arg(2i)\ [2\pi]$$

$$\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

② $(IB)\perp(A'B')$

ولدينا :

$$\left|\frac{b'-a'}{b-z_I}\right|=|2i|=2$$

ومنه ،

$$|b'-a'|=2|b-z_I|$$

أي ،

$$\boxed{A'B'=2BI}$$

التمرين II :

① . إذا كان n زوجي

$$(\exists h\in\mathbb{Z})/n=2h \Rightarrow n^4=16h^4$$

إذن :

$$n^4\equiv0[16] \quad (1)$$

إذا كان n فردي

$$(\exists h'\in\mathbb{Z})/n=2h'+1 \Rightarrow n^4=(2h+1)^2(2h+1)^2$$

$$\Rightarrow n^4=(4h^2+1+4h)^2$$

$$\Rightarrow n^4=16h^4+8h^2(1+4h)+(1+4h)^2$$

$$\Rightarrow n^4=16h^4+8h^2+32h^3+1+16h^2+8h$$

$$\Rightarrow n^4=16(h^4+h^2+2h^3)+8h(h+1)+1$$

لدينا ،

$$\begin{cases}16(h^4+h^2+2h^3)\equiv0[16]\\ 8h(h+1)\equiv0[16]\end{cases}$$

(جداء عددين متتابعين هو عدد زوجي $h(h+1)=2q\ (\exists q\in\mathbb{Z})$)

إذن :

$$n^4\equiv1[16] \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$n^4\equiv0[16]$ أو $n^4\equiv1[16]$

②

$N=a^4+b^4$ $\quad a\wedge b=1$

الحالة (1) :

$$\begin{cases}a^4\equiv0[16]\\ b^4\equiv1[16]\end{cases} \text{ أو } \begin{cases}a^4\equiv1[16]\\ b^4\equiv0[16]\end{cases}$$

وعليه :

$$a^4+b^4\equiv1[16]$$

أي :

$$N\equiv1[16]$$

الحالة (2)

$$\begin{cases}a^4\equiv1[16]\\ b^4\equiv1[16]\end{cases}$$

وعليه :

$$a^4+b^4\equiv2[16]$$

أي :

$$N\equiv2[16]$$

نستنتج أن :

$N\equiv1[16]$ أو $N\equiv2[16]$

③ أ- نضع : $D = p\wedge a$

(لأن p/N)

$$\begin{cases} D/p \\ D/a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D/N \\ D/a^4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D/a^4+b^4 \\ D/a^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D/b^4 \\ D/a^4\end{cases} \Rightarrow D/a^4\wedge b^4$$

و $a^4\wedge b^4=1$

وعليه: $D/1$

إذن $D=1$

ومنه: $\boxed{p\wedge a=1}$

نضع $d=p\wedge b$

(لأن p/N)

$$\begin{cases} d/p \\ d/b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/N \\ d/a^4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a^4+b^4 \\ d/b^4 \end{cases}$$

$\Rightarrow d/a^4\wedge b^4$ و $a^4\wedge b^4=1$

$\Rightarrow d/1$

أي $d=1$

وعليه: $\boxed{p\wedge b=1}$

ب- لدينا: $p\wedge a=1$ حسب خاصية Bezout

$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^2 / \alpha a+\beta p=1$

أي: $(-\alpha)a-\beta p=-1$

نضع: $-\alpha=c$

ومنه: $(\exists c\in\mathbb{Z})\quad ca\equiv -1[p]$

لدينا: $p/N \Rightarrow N\equiv 0[p]$

$\Rightarrow a^4\equiv -b^4[p]$

ولدينا: $ac\equiv -1[p]\Rightarrow (ac)^4\equiv 1[p]$

و: $(ac)^4\equiv -(bc)^4[p]$

وعليه: $-(bc)^4\equiv 1[p]$

ومنه: $(bc)^4\equiv -1[p]$

نضع: $bc=x$ وعليه،

$(\exists x\in\mathbb{Z})\quad x^4\equiv -1[p]$

ج- ليكن p عدد أولي ومنه : حسب مبرهنة فيرما

$x^p\equiv x[p] \Rightarrow x(x^{p-1}-1)\equiv 0[p]$

نفترض أن $x\equiv 0[p]$

$x\equiv 0[p]\Rightarrow x^4\equiv 0[p]$

ولدينا: $x^4\equiv -1[p]$ غير صحيح

إذن p لا يقسم x.

وعليه:

$\boxed{x^{p-1}\equiv 1[p]}$

$\exists!(q,r)\in\mathbb{Z}^2 / p=8q+r$

$x^4\equiv -1[p]\Rightarrow x^8\equiv 1[p]$

$\Rightarrow x^{8q+r-1}\equiv x^{r-1}[p]$

$\Rightarrow x^{p-1}\equiv x^{r-1}[p]$

وبالتالي:

$\boxed{x^{r-1}\equiv 1[p]}$

- نبين أن $r=1$

$0\leq r\leq 7$ (باقي القسمة الإقليدية للعدد p على 8)

$r=0 \Leftarrow$ $p=8q$ و p أولي إذن $r\neq 0$

$r\notin\{2,4,6\}$ لأن p عدد أولي أي p فردي وعليه r فردي

$r=3\Leftarrow$

$x^2\equiv 1[p]\Rightarrow x^4\equiv 1[p]$

ولدينا: $x^4\equiv -1[p]$

ومنه،

$r\neq 3$

$r=5\Leftarrow$

$x^4\equiv 1[p]$ و $x^4\equiv -1[p]$

إذن: $r\neq 5$.

$r=7\Leftarrow$

$x^6\equiv 1[p]$ و $x^4\equiv -1[p]$

$x^6\equiv 1[p]$ و $x^6\equiv -x^2[p]$

$x^2\equiv -1[p]\Rightarrow x^4\equiv 1[p]$ و $x^4\equiv -1[p]$

وعليه $r\neq 7$.

$r=1\Leftarrow$

$1\equiv 1[p]$

إذن:

$\boxed{r=1}$

التمرين III

$f_n(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+1}$

1- أ- لنبين أن $\lim_{x \to 0^+} x(\ln x)^3 = 0$

نضع $X = x^{1/3}$ ومنه $x = X^3$

$\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^3 = \lim_{X \to 0^+} X^3(\ln(X^3))^3$

$= \lim_{X\to 0^+} (3X\ln(X))^3$

ولدينا

$\lim_{X\to 0^+} X\ln(X) = 0$

وعليه:

$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^3 = 0}$

$\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - (\ln x)^3\right)$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(1 - x(\ln x)^3\right)$

ولدينا:

$\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^3 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} 1 - x(\ln x)^3 = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{cases}$

وعليه:

$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = +\infty}$

ب- $\lim_{x\to +\infty} f_1(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} - (\ln x)^3$

$\begin{cases} \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x\to +\infty} (\ln x)^3 = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} - (\ln x)^3 = -\infty$

وعليه:

$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f_1(x) = -\infty}$

(2) لنبين أن: $\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} = 0$

نضع $X = x^{1/3}$ ومنه $x = X^3$

ومنه:

$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} = \lim_{X\to +\infty} \frac{(\ln(X^3))^3}{X^3}$

$= \lim_{X\to +\infty} \left(\frac{3\ln(X)}{X}\right)^3$

ولدينا:

$\lim_{X\to +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0 \Rightarrow \lim_{X\to +\infty} \left(\frac{3\ln(X)}{X}\right)^3 = 0$

ومنه:

$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} = 0}$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^3}{x}$

$\{\lim \quad (\ln x)^3$

ومنه:

$\lim_{x\to +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = 0$

إذن: (C_1) يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأفاصيل

(3) f_1 قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

$f_1'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{3(\ln x)^2}{x}$

$= -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3(\ln x)^2}{x}\right) < 0 \quad (x \in \mathbb{R}^{+*})$

ومنه f_1 تناقصية قطعا على $\mathbb{R}^+$

x	$0 \qquad\qquad\qquad +\infty$
$f_1(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

(4) f_1 متصلة ومتناقصة قطعا على $\mathbb{R}^{+*}$

ومنه f_1 تقابل من $\mathbb{R}^{+*}$ نحو $\mathbb{R}$.

و $0 \in \mathbb{R}$ إذن المعادلة $f_1(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_1 على $\mathbb{R}^{+*}$

ولدينا:

$f_1(2) = \frac{1}{2} - (\ln(2))^2 > 0$

$f_1(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$

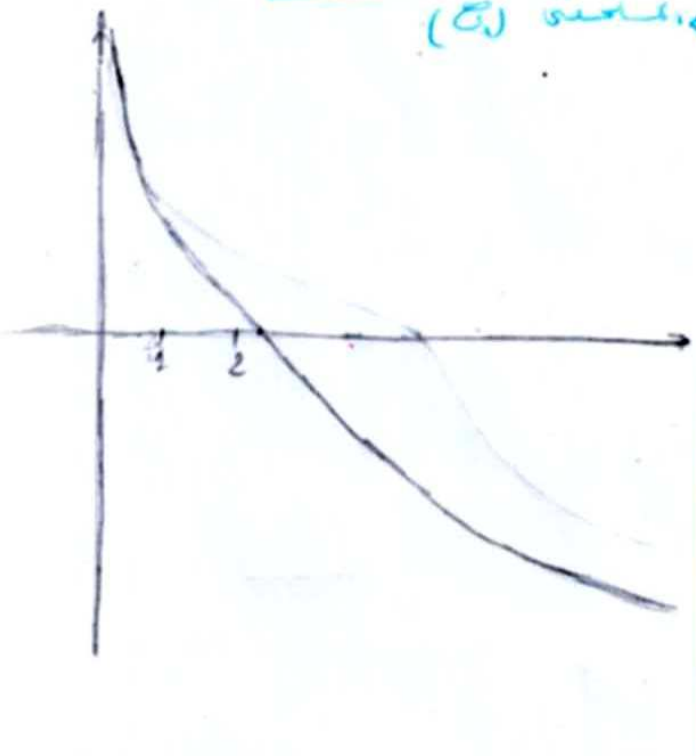
ومنه: f_1 تناقصية على $\mathbb{R}^{+*}$

$f_1(e) < f_1(\alpha_1) < f_1(2)$

وعليه:

$2 < \alpha_1 < e$

المنحنى (C_1)



II-①

$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+1}\right)$

لدينا :

$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{2n+1} = +\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0\end{cases}$

وعليه :

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty}$

$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+1} = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(1 - x(\ln x)^{2n+1}\right)$

نضع : $x = X^{2n+1}$ ومنه $X = x^{\frac{1}{2n+1}}$

ومنه :

$\lim_{x\to0^+} f_n(x) = \lim_{X\to0^+}\frac{1}{X^{2n+1}}\left(1-\left(X\ln(X^{2n+1})\right)^{2n+1}\right)$

$= \lim_{X\to0^+}\frac{1}{X^{2n+1}}\left(1-\left((2n+1)X\ln(X)\right)^{2n+1}\right)$

لدينا :

$\begin{cases}\lim_{X\to0^+} X\ln(X) = 0\\ \lim_{X\to0^+}\frac{1}{X^{2n+1}} = +\infty\end{cases}$

ومنه :

$\boxed{\lim_{x\to0^+} f_n(x) = +\infty}$

②

$f_n'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{(2n+1)(\ln x)^{2n}}{x}$

$= -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{(2n+1)(\ln x)^{2n}}{x}\right) < 0$

لدينا f_n متناقصة تماما و مستمرة على $\mathbb{R}^{*+}$

إذن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β_n .

ولدينا :

$f_n(1) = 1 > 0$

$f_n(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$

f_n متناقصة

وعليه

$\boxed{1 < \beta_n < e}$

③

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+3} - \frac{1}{x} + (\ln x)^{2n+1}$

$= (\ln(x))^{2n+1}\left(1 - (\ln x)^2\right)$

$\forall x\in[1,e]$ $\quad 0 < \ln(x) < 1$

$-(\ln(x))^2 > -1$

$1-(\ln x)^2 > 0$ و $(\ln x)^{2n+1} > 0$

ومنه :

$\boxed{f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0}$

ب- لدينا : $\forall x\in[1,e]$

$f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

ومنه $\beta_n \in [1,e]$.

$f_{n+1}(\beta_n) > f_n(\beta_n)$ و $f_n(\beta_n) = 0$

ومنه : $f_{n+1}(\beta_n) > 0$ و $f_{n+1}(\beta_{n+1}) = 0$

وعليه :

$f_{n+1}(\beta_n) > f_{n+1}(\beta_{n+1})$

f_{n+1} متناقصة على $[1,e]$ و $(\beta_n,\beta_{n+1})\in[1,e]^2$

وعليه

$\beta_n < \beta_{n+1}$

إذن: $(\beta_n)_{n\geq1}$ متزايدة تماما

4- أ-

لدينا : $f_n(\beta_n)=0 \Rightarrow \frac{1}{\beta_n} = (\ln(\beta_n))^{2n+1}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\beta_n}\right)^{\frac{1}{2n+1}} = \ln(\beta_n)$

$\Rightarrow \ln(\ln(\beta_n)) = \frac{1}{2n+1}\ln\left(\frac{1}{\beta_n}\right)$

لدينا :

$\beta_n < e \Rightarrow \frac{1}{\beta_n} > \frac{1}{e}$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{\beta_n}\right) > \ln(e^{-1})$

$\Rightarrow \frac{1}{2n+1}\ln\left(\frac{1}{\beta_n}\right) > \frac{-1}{2n+1}$ $\quad \left(\frac{1}{2n+1}>0\right)$

$\Rightarrow \ln(\ln(\beta_n)) > \frac{-1}{2n+1}$

ولدينا :

$\frac{-1}{2n+1} > \frac{-1}{2n}$

وعليه :

$\boxed{\ln(\ln(\beta_n)) > \frac{-1}{2n}}$ $\quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب- لدينا :

$\ln(\ln(\beta_n)) > \frac{-1}{2n} \Rightarrow \ln(\beta_n) > e^{-\frac{1}{2n}}$

ولدينا ،

$\beta_n < e \Rightarrow \ln(\beta_n) < 1$

وعليه ،

$e^{\frac{-1}{2n}} < \ln(\beta_n) < 1$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{2n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{2n}} = e^0 = 1$

([illegible])

ومنه :

$\lim_{n\to+\infty} \ln(\beta_n) = 1$

أي

$\lim_{n\to+\infty} \beta_n = e$