التمرين الأول :

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^2 - 2i\sqrt{3}Z - 4 = 0$

2) نضع $a = 1 + i\sqrt{3}$; $b = -1 + i\sqrt{3}$ و نعتبر في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقطتين $A(a)$; $B(b)$.

ليكن R_1 الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و R_2 الدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ و نعتبر التطبيق $f = R_2 \circ R_1$

أ- بين أن $f(B) = A$

ب- لتكن $M(m)$ نقطة من (P) و نعتبر النقطتين $N = R_1(M)$ و $M' = f(M)$

(i) حدد بدلالة m العدد العقدي n لحق النقطة N

(ii) بين أن لحق النقطة M' هو العدد $m' = -m + 2i\sqrt{3}$ و استنتج طبيعة التطبيق f

ج- حدد مجموعة النقط $M(m)$ التي يكون من أجلها M , N , M' مستقيمية

التمرين الثاني :

نعتبر في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ المجموعة E للمصفوفات والتي تكتب على الشكل $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix}$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ و نضع $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

1) أ- بين أن $(E,+)$ زمرة تبادلية

ب- بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء حقيقي و أعط بعده

2) أحسب J^2 بدلالة I , J واستنتج الجداء $M(a,b)\times M(c,d)$

3) نعتبر التطبيق f المعرف ب : $\begin{cases} f : E \to \mathbb{C} \\ M(a,b) \to z = (a+b) + ib \end{cases}$

أ- بين أن f تقابل و عرف تقابله العكسي

ب- بين أن f تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

ج- استنتج بنية $(E,+,\times)$

د- حدد في E حلول المعادلة $M^3 - I + J = \theta$ حيث θ هي المصفوفة المنعدمة في $M_2(\mathbb{R})$

التمرين الثالث :

الجزء (1) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $D =]0,+\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = \frac{x-1}{x\ln x} \quad ; \quad x \neq 1 \quad \text{و} \quad f(1) = 1$$

1) بين أن الدالة f متصلة على D

2) أ- بين أن $f'(x) = \frac{\ln x - x + 1}{(x\ln x)^2}$ $\quad (\forall x \in D - \{1\})$

ب- بين أن الدالة f تناقصية على D

الجزء (2)

F دالة معرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{x^2} f(t)\,dt \quad , \; x \neq 0 \; ; \; x \neq 1 \\ F(0) = -\ln 2 \quad ; \quad F(1) = 0 \end{cases}$$

1) أ- بين أن $\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt = \ln 2$ $\quad (\forall x \in]0,1[)$

ب- بين أن $(x^2-1)\ln 2 \le F(x) \le (x-1)\ln 2$ $\quad (\forall x \in]0,1[)$

ج- أدرس اتصال الدالة F على يمين 0 و على يسار 1

2) أ- بين أن $\frac{x^2-x}{2\ln x} \le F(x) + \ln 2 \le \frac{x^2-x}{\ln x}$ $\quad (\forall x \in]0,1[)$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة F على يمين 0

3) ليكن x من المجال $]1,+\infty[$.

أ- بين أن $F(x) = (x^2-x)f(c)$ $\quad (\exists c \in [x,x^2])$

ب- أدرس اتصال و قابلية اشتقاق الدالة F على يمين النقطة 1

ج- بين أن $F(x) \ge \ln x$ و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

4) أ- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على كل من $]0,1[$ و $]1,+\infty[$

و أن $F'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$

ب- أدرس منحى تغيرات الدالة F و ضع جدول تغيراتها

2011 - 2012.

تصحيح الفرض المحروس رقم 3 الأسدس II

التمرين 1 :

1) لنحل المعادلة : $z^2 - 2i\sqrt{3}z - 4 = 0$

$\Delta = 4 = 2^2$

ومنه :

$z_1 = \dfrac{2i\sqrt{3} - 2}{2} = -1 + \sqrt{3}i$

$z_2 = \dfrac{2i\sqrt{3} + 2}{2} = 1 + \sqrt{3}i$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي :

$S = \{1 + \sqrt{3}i, -1 + \sqrt{3}i\}.$

2) أ.

لكل نقطة $M(z)$ من المستوى العقدي نضع : $M_1 = R_1(M)$ و $M_2 = R_2(M_1)$ وليكن z_1 و z_2 لحقي النقطتين M_1 و M_2 .

$R_1(M) = M_1 \Leftrightarrow z_1 = ze^{i\frac{\pi}{3}}$

$R_2(M_1) = M_2 \Leftrightarrow z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_1 - b) + b$

وعليه

$R_2 \circ R_1(M) \Leftrightarrow z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}(ze^{i\frac{\pi}{3}} - b) + b$

$\Leftrightarrow z_2 = -z - be^{i\frac{2\pi}{3}} + b$

ومنه :

$f(B) = R_2 \circ R_1(B) \Leftrightarrow z_2 = -\cancel{b} - be^{i\frac{2\pi}{3}} + \cancel{b}$

$\Leftrightarrow z_2 = -2e^{i(\pi - \frac{\pi}{3}) + \frac{2\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow z_2 = -2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow z_2 = a$

وعليه :

$f(B) = A.$

ب- (i)

$N = R_1(M) \Leftrightarrow n = me^{i\frac{\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow n = \frac{1}{2}m + \frac{\sqrt{3}}{2}mi$

(ii)

لدينا الكتابة العقدية للتطبيق f

$z' = -z - b(e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1)$

$z' = -z - (\sqrt{3}i - 1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2}\right)$

$z' = -z - \left(\frac{-3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2}\right)$

$z' = -z + 2\sqrt{3}i$

ومنه :

$f(M) = M' \Leftrightarrow m' = -m + 2\sqrt{3}i$

التمثيل العقدي للتطبيق f من الشكل : $z' = \alpha z + \beta$ حيث : $\alpha = -1 \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

إذن فان التطبيق f هو التماثل الذي مركزه $\Omega(\sqrt{3}i)$ ونسبته -1

ج.

$\begin{pmatrix} M \text{ و } M' \text{ و } N \\ \text{نقط} \\ \text{مستقيمية} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dfrac{m' - m}{n - m} \in \mathbb{R}$

$\dfrac{m' - m}{n - m} = \dfrac{-m + 2i\sqrt{3} - m}{\frac{1}{2}m + \frac{\sqrt{3}}{2}im - m}$

$= \dfrac{2(-m + i\sqrt{3})}{\frac{1}{2}m(-1 + \sqrt{3}i)}$

$= \dfrac{4(-m + i\sqrt{3})}{m(-1 + \sqrt{3}i)}$

$\dfrac{m' - m}{n - m} \in \mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{4(-m + i\sqrt{3})}{m(-1 + \sqrt{3}i)} = \dfrac{4(-\bar{m} + i\sqrt{3})}{\bar{m}(-1 + \sqrt{3}i)}$

$\Rightarrow \bar{m}(-m + i\sqrt{3}) = m(-\bar{m} + i\sqrt{3})$

$\Rightarrow -|m|^2 + i\sqrt{3}\bar{m} = -|m|^2 + i\sqrt{3}m$

$\Rightarrow m = \bar{m}$

$\Rightarrow m \in \mathbb{R}$

ومنه : مجموعة النقط $M(m)$ التي يكون من أجلها M و N و M' مستقيمية هو محور الأفاصيل $(D) : y = 0$

التمرين 2 :

A-1. لنبين أن $(E, +)$ زمرة تبادلية.

لدينا : $E \neq \emptyset$ لأن $\theta \in E$ حيث $a = b = 0$ حيث θ المصفوفة المنعدمة

ليكن A و B عنصرين من E.

$A\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix}$ و $B\begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix}$ ؛ $(x, y, a, b) \in \mathbb{R}^4$

$$A - B = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & -y \\ 2y & -x-2y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-x & b-y \\ -2(b-y) & (a-x)+2(b-y) \end{pmatrix}$$

نضع: $\alpha = a-x$ و $\beta = b-y$

$$A - B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -2\beta & \alpha+2\beta \end{pmatrix} \in E \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

إذن: $(E,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$

وبما أن: $(M_2(\mathbb{R}),+)$ زمرة تبادلية

فإن: $(E,+)$ زمرة تبادلية.

ج- لنبين أن: $(E,+,\cdot)$ فضاء حقيقي

لدينا: $(E,+)$ زمرة جزئية من $(M_2(\mathbb{R}),+)$

لنبين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\cdot)$

ليكن $M_{(a,b)}$ مصفوفة من E و $\gamma\in\mathbb{R}$

$$\gamma . M = \gamma \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma a & \gamma b \\ -2\gamma b & \gamma a+2\gamma b \end{pmatrix}$$

نضع: $\gamma a = \alpha$ و $\gamma b = \beta$

$$\gamma M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -2\beta & \alpha+2\beta \end{pmatrix} \in E \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

ومنه: E جزء مستقر في $(M_2(\mathbb{R}),\cdot)$

إذن: $(E,+,\cdot)$ فضاء جزئي من $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

وبما أن: $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء حقيقي

فإن: $(E,+,\cdot)$ فضاء حقيقي

لنحدد بعده

$M\in E$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= aI + bJ.$$

ومنه: (I,J) أسرة مولدة للفضاء $(E,+,\cdot)$

$$M = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ و } b = 0$$

ومنه: الأسرة (I,J) حرة.

وعليه: (I,J) أساس الفضاء الحقيقي $(E,+,\cdot)$

إذن: $\dim E = 2$

-2

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -2I + 2J.$$

لنستنتج الجداء $M(a,b)\times M(c,d)$

$$M(a,b)\times M(c,d) = (aI+bJ)\times(cI+dJ)$$

$$= acI + adJ + bcJ + bdJ^2$$

$$= acI + adJ + bcJ + 2bdJ - 2bdI$$

$$= (ac-2bd)I + (ad+bc+2bd)J.$$

3- أ- لنبين أن f تقابل.

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ و $M\in E$.

نضع $z = x+yi$ ؛ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$f(M(a,b)) = z \Rightarrow (a+b)+bi = x+yi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = x \\ b = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = x-y \\ b = y. \end{cases}$$

ومنه:

$$(\forall z\in\mathbb{C})\ (\exists!\, M(a,b)\in E) \,/\, f(M(a,b)) = z$$

إذن: f تقابل من E نحو $\mathbb{C}$.

التقابل العكسي

$$f^{-1}: \mathbb{C} \longrightarrow E$$

$$z = x+yi \longrightarrow M(x-y,\, y)$$

ب- لنبين أن f تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

ليكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ عنصرين من E.

$$f(M(a,b)\times M(c,d)) = f(M(ac-2bd,\, ad+bc+2bd))$$

$$= (ac+ad+bc) + (ad+bc+2bd)i$$

ومن جهة أخرى :

$$f(M(a,b)) \times f(M(c,d)) = \big((a+b)+bi\big)\big((c+d)+di\big)$$

$$= ac + ad + bc + bd + (a+b)id + (c+d)bi - bd$$

$$= (ac+ad+bc) + (ad+bc+2bd)i$$

$$= f\big(M(a,b) \times M(c,d)\big)$$

ومنه : f تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

ج. لنستنتج بنية $(E,+,\times)$

لدينا :

$(E,+)$ زمرة تبادلية.

f تشاكل تقابلي من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

و $f^{-1}(\mathbb{C}^*) = E^*$

لدينا : $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية.

إذن : $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية.

و من خلال السؤال 2 E جزء مستقر في $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

لدينا : $\times$ توزيعي بالنسبة لـ $+$ في $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

ومنه $\times$ توزيعي بالنسبة لـ $+$ في E.

نستنتج أن : $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

4. لنحدد في E حلول المعادلة $M^3 - I + J = 0$ حيث M المصفوفة المجهولة في $M_2(\mathbb{R})$

$$M^3 - I + J = 0 \Rightarrow f(M^3) = f(I-J)$$

$$\Rightarrow (f(M))^3 = -i$$

$$\Rightarrow \big((a+b)+bi\big)^3 = -i$$

نضع $z = x+yi$ ، $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$z^3 = -i \Rightarrow z^3 - i^3 = 0$$

$$\Rightarrow (z+i)(z^2+zi-1) = 0$$

$$\Rightarrow z = -i \text{ أو } z^2+zi-1=0$$

$$\Delta = 3 = (\sqrt{3})^2$$

$$z = \frac{-i-\sqrt{3}}{2} \text{ أو } z = \frac{-i+\sqrt{3}}{2}$$

لدينا : $z = (a+b)+bi$

$$\begin{cases} b=-\frac{1}{2} \\ a+b=\frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} b=-\frac{1}{2} \\ a+b=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$$

ومنه حلول المعادلة هي :

$$S = \left\{ M(1,-1) \,;\, M\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, -\frac{1}{2}\right) ; M\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right\}$$

التمرين 3

الجزء I :

$$f(x) = \frac{x-1}{x\ln x} \quad x \neq 1 \quad , \quad f(1) = 1$$

1. لنبين أن الدالة متصلة في D

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\frac{\ln(x)}{x-1}} \right) \times \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1) \quad \left(\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \right)$$

ومنه f متصلة في 1

ولدينا :

$x \mapsto x\ln x$ متصلة في $D-\{1\}$ وغير منعدمة على هذا المجال

$x \mapsto x-1$ متصلة على $D-\{1\}$

ومنه :

$x \xrightarrow{f} \frac{x-1}{x\ln x}$ متصلة على $D-\{1\}$. ومتصلة في 1

ومنه : الدالة f متصلة على D.

2. أ. بين

$$(\forall x \in D-\{1\}) \quad f'(x) = \frac{\ln x - x + 1}{(x\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x\ln x - (\ln x + 1)(x-1)}{(x\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\ln x - x + 1}{(x\ln x)^2} \quad (\forall x \in D-\{1\})$$

ب. لنبين أن الدالة f تناقصية على D

نضع :

$$g(x) = \ln x - x + 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

ومنه: $\forall x\in D-\{1\} \quad ,g(x)<0$

ومنه: $f'(x)<0 \quad \forall x\in D-\{1\}$

وعليه f متناقصة على D.

الجزء (2):

1) أ- $\forall x\in]0,1[$

$$\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln(t)}dt = \left[\ln|\ln(t)|\right]_x^{x^2}$$
$$= \ln|\ln(x^2)| - \ln|\ln(x)|$$
$$= \ln\left(\left|\frac{2\ln(x)}{\ln(x)}\right|\right)$$
$$= \ln(2)$$

وعليه

$$\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln(t)}dt = \ln(2) \quad (\forall x\in]0,1[)$$

ب. لنبين أن: $(\forall x\in]0,1[)$

$$(x^2-1)\ln(2) \le F(x) \le (x-1)\ln(2)$$

لدينا: $x^2<x \quad \forall x\in]0,1[$

ومنه

$$x^2\le t\le x \Rightarrow x^2-1\le t-1\le x-1$$
$$\Rightarrow \frac{(x-1)}{t\ln(t)} \le \frac{t-1}{t\ln(t)} \le \frac{x^2-1}{t\ln(t)}$$

$(x^2<x) \quad \forall t\in]0,1[\quad \left(\frac{1}{t\ln(t)}<0\right)$

$$(x^2-1)\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}dt \le F(x) \le (x-1)\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln(t)}dt$$
$$(x^2-1)\ln(2) \le F(x) \le (x-1)\ln(2) \quad (\forall x\in]0,1[)$$

ج- لندرس اتصال الدالة F على يمين 0.

$$\lim_{x\to 0^+}(x^2-1)\ln(2) = \lim_{x\to 0^+}(x-1)\ln(2) = -\ln(2)$$

ومنه:

$$\lim_{x\to 0^+}F(x) = -\ln(2) = F(0)$$

ومنه: F متصلة على يمين 0.

لندرس اتصال الدالة على يسار 1.

$$\lim_{x\to 1^-}(x^2-1)\ln(2) = \lim_{x\to 1^-}(x-1)\ln(2) = 0$$

وعليه:

$$\lim_{x\to 1^-}F(x) = 0 = F(1)$$

ومنه: F متصلة على يسار 1

2) أ- لنبين أن: $(\forall x\in]0,1[)$

$$\frac{x^2-x}{2\ln x} \le F(x)+\ln(2) \le \frac{x^2-x}{\ln(x)} \quad \forall x\in]0,1[$$

$$F(x)+\ln(2) = \int_x^{x^2}\frac{t-1}{t\ln(t)}dt + \int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln(t)}dt$$
$$= \int_x^{x^2}\frac{t}{t\ln(t)}dt$$
$$= \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}dt$$

لدينا $x^2<x \quad (\forall x\in]0,1[)$

$$x^2\le t\le x \Rightarrow 2\ln(x)\le \ln(t)\le \ln(x)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\ln(x)} \le \frac{1}{\ln(t)} \le \frac{1}{2\ln(x)}$$
$$\Rightarrow \int_x^{x^2}\frac{1}{2\ln(x)}dt \le \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}dt \le \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(x)}dt$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2\ln(x)}[t]_x^{x^2} \le F(x)+\ln(2) \le \frac{1}{\ln(x)}[t]_x^{x^2}$$
$$\Rightarrow \frac{x^2-x}{2\ln(x)} \le F(x)+\ln(2) \le \frac{x^2-x}{\ln(x)} \quad (\forall x\in]0,1[)$$

ب- لندرس قابلية اشتقاق F على يمين 0.

$$\frac{F(x)-F(0)}{x} = \frac{F(x)+\ln(2)}{x} \quad \forall x\in]0,1[$$
$$\frac{x-1}{2\ln(x)} \le \frac{F(x)+\ln(2)}{x} \le \frac{x-1}{\ln(x)}$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{2\ln(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{\ln(x)} = 0$$

وعليه:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)+\ln(2)}{x} = 0 \in \mathbb{R}$$

إذن F قابلة للاشتقاق على يمين 0.

3) أ- لدينا $t\to f(t)$ متصلة على $[x,x^2]$ $(\forall x>1)$

وعليه

$$\exists c\in [x,x^2] \,/\, f(c) = \frac{1}{x^2-x}F(x)$$

أي:

$$\exists c\in [x,x^2] \,/\, F(x) = (x^2-x)f(c) \quad (\forall x>1)$$

ب-

$$x\le c\le x^2 \Rightarrow f(x^2)\le f(c)\le f(x)$$

(f متناقصة على $[x,x^2]$ ، $(\forall x>1)$) $x^2>x$

وعليه

$$(x^2-x)f(x^2) \le (x^2-x)f(c) \le (x^2-x)f(x)$$

$$(x^2-x)f(x^2) \leq F(x) \leq (x^2-x)f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^+}(x^2-x)f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2-x)f(x^2)=0$$

ومنه :

$$\lim_{x\to 1^+}F(x)=0=F(1)$$

← إذن F متصلة على يمين النقطة 1

$$\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=\frac{F(x)}{x-1}$$

$$xf(x^2)\leq\frac{F(x)}{x-1}\leq xf(x)$$

$$\lim_{x\to 1^+}xf(x^2)=\lim_{x\to 1^+}xf(x)=1$$

وعليه

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=1\in\mathbb{R}$$

← إذن F قابلة للاشتقاق على يمين النقطة 1

ج- لنبين أن : $F(x)\geq \ln x$

$$F(x)-\ln(x)=\int_1^{x^2}\frac{t-1}{t\ln(t)}dt-\int_1^{x^2}\frac{1}{t}dt$$

$$=\int_1^{x^2}\frac{t-1-\ln(t)}{t\ln(t)}dt$$

$$=\int_1^{x^2}\frac{-(\ln(t)-t+1)}{t\ln(t)}dt$$

لدينا (من خلال س 2 ب. ج)

$$-(\ln(t)-t+1)=-g(t)\geq 0 \quad \forall t\in]1,+\infty[$$

و $t\ln(t)>0$ ومنه

$$\int_1^{x^2}\frac{-(\ln(t)-t+1)}{t\ln(t)}dt\geq 0$$

أي :

$$F(x)\geq\ln(x)\quad\forall x\in[1,+\infty[$$

لنحسب $\lim_{x\to+\infty}F(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$$

حسب مصاديق التقارب

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$$

4-أ) لنبين أن F قابلة للاشتقاق على كل من $]0,1[$ و $]1,+\infty[$

$t\mapsto f(t)$ متصلة على كل من $]0,1[$ و $]1,+\infty[$

ومنه فهي تقبل دالة أصلية G بحيث :

$$F(x)=G(x^2)-G(x).$$

$x\mapsto x^2$ قابلة للاشتقاق على $]0,1[$ و $]1,+\infty[$

$f(]0,1[)\subset]0,1[$

$f(]1,+\infty[)\subset]1,+\infty[$

$x\mapsto G(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0,1[\cup]1,+\infty[$ ومنه :

$x\overset{F}{\mapsto}G\circ g(x)$ قابلة للاشتقاق على كل من $]0,1[$ و $]1,+\infty[$.

$$F'(x)=2xG'(x^2)-G'(x)$$

$$=2xf(x^2)-f(x)$$

$$=2x\left(\frac{x^2-1}{2x^2\ln(x)}\right)-\left(\frac{x-1}{x\ln(x)}\right)$$

$$=\frac{x^2-x}{x\ln(x)}$$

$$=\frac{x-1}{\ln(x)}$$

$$\frac{x-1}{\ln(x)}>0\qquad\forall x\in(]0,1[\cup]1,+\infty[)$$

وعليه F تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$.

جدول التغيرات .

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	
$F(x)$	$-\ln(2)$	↗	0	↗	$+\infty$

من إنجاز التلميذة : أمينة مامو
تحت إشراف الأستاذ :
الحسانئي بوشعيب .