

ملخص وقواعد في الرياضيات

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا

- شعبة التعليم الأصلي: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

ملخص درس المتتاليات الترجيعية:

II. متتالية هندسية

• لكي نبين أن متتالية هندسية نحسب: $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ العدد q الذي

نجده هو الأساس و $u_n = u_0 \times q^n$ هي الكتابة بدلالة n

• إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم

وحدها الأول u_0 فان: $u_n = u_0 q^{n-0}$

• إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم

وحدها الأول u_1 فان: $u_n = u_1 q^{n-1}$

• وبصفة عامة: $u_n = u_p q^{n-p}$

• مجموع حدود متتالية لمتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية أساسها q

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) \text{ : هو } q \neq 1$$

$$\text{مثال: } S_1 = u_4 + u_5 + \dots + u_{30} = u_4 \frac{1 - q^{30-4+1}}{1 - q}$$

I. متتالية حسابية

• لكي نبين أن متتالية حسابية نحسب: $u_{n+1} - u_n$ العدد r الذي نجده هو

الأساس و $u_n = u_0 + nr$ هي الكتابة بدلالة n

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_1

فان: $u_n = u_1 + (n-1)r$

وبصفة عامة: $u_n = u_p + (n-p)r$

• مجموع حدود متتالية لمتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حسابية:

$$n > p \geq n_0 \quad S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$$

$$\text{هو: } S_n = (n - p + 1) \left(\frac{u_n + u_p}{2} \right)$$

$$\text{ملاحظة: } S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

$$\text{أمثلة: } S_1 = u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{30} = (30 - 3 + 1) \frac{u_3 + u_{30}}{2}$$

$$S_2 = u_7 + u_8 + u_9 + \dots + u_{25} = (25 - 7 + 1) \frac{u_7 + u_{25}}{2} = (19) \frac{u_7 + u_{25}}{2}$$

(2) أحسب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ واستنتج طبيعة المتتالية (v_n)

(3) أكتب v_n بدلالة n

(4) استنتج u_n بدلالة n

الجواب: نعوض n ب 0

$$\text{فنجد: } u_{0+1} = 2 \times u_0 + 2 = 2 \times 2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$\text{اذن: } u_1 = 7$$

نعوض n ب 1 فنجد:

$$u_{1+1} = 2 \times u_1 + 2 = 2 \times 7 + 2 = 14 + 2 = 16$$

$$\text{اذن: } u_2 = 16$$

$$\text{نعوض } n \text{ ب } 0 \text{ فنجد: } v_0 = u_0 + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$\text{نعوض } n \text{ ب } 1 \text{ فنجد: } v_1 = u_1 + 2 = 7 + 2 = 9$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} + 2}{u_n + 2} = \frac{2u_n + 2 + 2}{u_n + 2} = \frac{2u_n + 4}{u_n + 2} = \frac{2(u_n + 2)}{u_n + 2} = 2 = q \quad (2)$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول $v_0 = 4$

(3) كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول $v_0 = 4$

$$\text{فان: } v_n = v_0 \times q^n \text{ أي: } v_n = 4 \times 2^n$$

$$(4) \text{ استنتج } u_n \text{ بدلالة } n \text{ لدينا: } v_n = u_n + 2$$

$$\text{اذن: } v_n - 2 = u_n \text{ أي: } u_n = 4 \times 2^n - 2$$

III. المتتاليات من صنف $U_{n+1} = aU_n + b$

مثال 1: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بالعلاقة الترجيعية

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases} \text{ التالية:}$$

أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)

الجواب: نعوض n ب 0 فنجد:

$$u_{0+1} = 2 \times u_0 + 3 = 2 \times 1 + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$\text{اذن: } u_1 = 5$$

نعوض n ب 1 فنجد:

$$u_{1+1} = 2 \times u_1 + 3 = 2 \times 5 + 3 = 10 + 3 = 13$$

$$\text{اذن: } u_2 = 13$$

نعوض n ب 2 فنجد:

$$u_{2+1} = 2 \times u_2 + 3 = 2 \times 13 + 3 = 26 + 3 = 29$$

$$\text{اذن: } u_3 = 29$$

ملاحظة: هذه المتتالية تسمى متتالية ترجيعية

مثال 2: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي:

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 2 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي: $v_n = u_n + 2$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

(1) أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1