دراسة الدوال

I- الاشتقـــــــــــاق

1) تعاريف

a) تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كانت $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in\mathbb{R}$ ونكتب $f'(x_0)=l$.

b) تكون f قابلة للاشتقاق على يمين x_0 إذا كان $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in\mathbb{R}$ ونكتب $f'_d(x_0)=l$.

c) تكون f قابلة للاشتقاق على يسار x_0 إذا كان $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in\mathbb{R}$ ونكتب $f'_g(x_0)=l$.

d) تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على يمين ويسار x_0 و $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$.

2) التأويل الهندسي.

a) إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فإن المنحنى c_f يقبل مماسا (T) في النقطة $M(x_0,f(x_0))$ معاملة الموجه $f'(x_0)$ معادلته $(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

b) إذا كانت f قابلة للاشتقاق على يمين x_0 فإن C_f يقبل نصف مماس (T_1) على يمين $M(x_0,f(x_0))$ معاملة الموجه $f'_d(x_0)$ معادلته $(T_1): y=f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

c) لدينا نتيجة مماثلة بالنسبة للاشتقاق على اليسار.

d) إذا كانت $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب وموجه نحو الأعلى على يمين $A(x_0,f(x_0))$.

e) إذا كانت $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب وموجه نحو الأسفل على يمين $A(x_0,f(x_0))$.

f) إذا كانت $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب وموجه نحو الأسفل على يسار $A(x_0,f(x_0))$.

g) إذا كانت $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب وموجه نحو الأعلى على يسار $A(x_0,f(x_0))$.

ملاحظة:

*) إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فإن المنحنى C_f يمر بشكل عادي من النقطة $M(x_0,f(x_0))$ (لا ينكسر).

*) وإذا كانت f غير قابلة للاشتقاق في x_0 فإن المنحنى C_f (ينكسر) في النقطة $M(x_0,f(x_0))$ ويكون زاوية.

3) اشتقاق مركب دالتين

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ فإن gof قابلة للاشتقاق على I و

$$\boxed{(\forall x\in I)\quad (gof)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)}$$

4) اشتقاق الدالة العكسية

إذا كانت f قابلة للاشتقاق ورتيبة قطعا على مجال I و $(\forall x\in I): f'(x)\neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $J=f(I)$ و

$$\boxed{(\forall x\in J): (f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}\ .$$

5) الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية.

1) $(a)'=0$ $\quad (a\in\mathbb{R})$	12) $(f+g)'=f'+g'$
2) $(x)'=1$	13) $(af)'=af'$
3) $(ax)'=a$	14) $(f\cdot g)'=f'g+fg'$
4) $(x^r)'=rx^{r-1}$ $\quad r\in\mathbb{Q}$	15) $(f^r)'=rf'\cdot f^{r-1}$
5) $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	16) $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$
6) $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	17) $\left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{-f'}{f^2}$
7) $\left(\sqrt{u(x)}\right)'=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	18) $(\sin x)'=\cos x$
8) $\left(\sqrt[3]{u(x)}\right)'=\frac{u'(x)}{3\left(\sqrt[3]{u(x)}\right)^2}$	19) $(\cos x)'=-\sin x$
9) $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)'=\frac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$	20) $(\tan x)'=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
10) $(Arc\tan x)'=\frac{1}{1+x^2}$	21) $(\sin(u(x)))'=u'(x)\cos(u(x))$
11) $(Arc\tan(u(x)))'=\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$	22) $(\cos u(x))'=-u'(x)\sin(u(x))$
23) $(\tan(u(x)))'=u'(x)(1+\tan^2(u(x)))$	

ملاحظة:

a) لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .
الدالة $f(x)=\sqrt[n]{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على $D_f-\{x/u(x)=0\}$.

b) إذا كانت f دالة تغير الصيغة في x_0 أو إذا كان الحد الموجود تحت الجذر ينعدم في x_0 . يجب دراسة اشتقاق f في x_0 باستعمال معدل التغير.

6) رتابة دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

a) تكون f تزايدية على I إذا وفقط إذا كان:
$(\forall x\in I)\ \ f'(x)\geq 0$.

b) تكون f تناقصية على I إذا وفقط إذا كان:
$(\forall x\in I)\ \ f'(x)\leq 0$.

c) تكون f ثابتة على I إذا وفقط إذا كان:
$(\forall x\in I)\ \ f'(x)=0$.

7) مطارف دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I. يكون للدالة f'' مطرافا في x_0 إذا وفقد إذا كانت f' تنعدم وتغير الإشارة في x_0.

8) التقعر:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I.

a) يكون C_f محدبا " $\cup$ " إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I): f''(x)\geq 0$.

b) يكون C_f مقعرا " $\cap$ " إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I): f''(x)\leq 0$.

9) نقطة انعطاف.

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I وليكن $x_0\in I$.
تكون النقطة $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ نقطة انعطاف إذا وفقط إذا كانت f'' تنعدم وتغير الإشارة في x_0.

ملاحظة:

a) إذا كانت f تنعدم ولا تغير الإشارة في x_0 فإن النقطة $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ نقطة انعطاف ويكون المماس في هذه النقطة موازيا لمحور الأفاصيل

b) إذا أردنا تحديد جميع نقط انعطاف أو دراسة التقعر نحسب $f''(x)$ وندرك إشارتها.

II- التمثيل المبياني لدالة

1) محور تماثل – مركز تماثل.

a) يكون المستقيم $(\Delta).x=a$ محور تماثل المنبنى C_f إذا وفقط إذا كان:
*) لكل x من D_f $\quad 2a-x\in D_f$
*) $(\forall x\in D_f): f(2a-x)=f(x)$

b) تكون النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل المنحنى C_f إذا وفقط إذا كان:
*) لكل x من D_f $\quad 2a-x\in D$
*) $(\forall x\in D_f): f(2a-x)=2b-f(x)$

2) الفروع اللانهائية.

a) تعريف

نقول إن C_f يقبل فرعا لا نهائيا إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ أو $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ أو $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

b) تصنيف الفروع اللانهائية

1) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty}$
فإن المستقيم $(\Delta): x=a$ مقارب ل C_f بجوار a.

2) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b}$
فإن المستقيم $(\Delta): y=a$ مقارب ل C_f بجوار ∞.

3) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty}$ نقوم بحساب $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

a) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty}$
فإن C_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار ∞.

b) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0}$
فإن C_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار ∞.

c) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0}$ نقوم بحساب $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right)$.

i) إذا كان $\boxed{\lim\left(f(x)-ax\right)=b}$
فإن المستقيم $(\Delta): y=ax+b$ مقارب ل C_f بجوار ∞.

ii) إذا كان $\boxed{\lim\left(f(x)-ax\right)=\infty}$
فإن C_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه $y=ax$ بجوار ∞.

ملاحظة:

يكون المستقيم $(\Delta): y=ax+b$ مقاربا ل C_f بجوار ∞ إذا وفقط إذا كان $\lim\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$

ونستعمل هذه الخاصية إذا كان السؤال هو بين أن $(\Delta): y=ax+b$ مقارب أو إذا كانت $f(x)$ تكتب على شكل $f(x)=ax+b+h(x)$ مع $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=0$.

3) بعض الملاحظات.

a) حلول المعادلة $f(x)=m$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f مع المستقيم $(\Delta): y=m$.

b) حلول المعادلة $f(x)=0$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f مع محور الأفاصيل.

c) حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f و C_g.

d) حلول المتراجحة $f(x)\leq g(x)$ هي المجالات التي يكون فيها C_f تحت C_g.

e) من أجل دراسة وضع C_f بالنسبة للمستقيم $(\Delta): y=ax+b$ نقوم بدراسة إشارة $f(x)-y$

*) إذا كان $f(x)-y\geq 0$ فإن C_f يوجد فوق (Δ).

*) إذا كان $f(x)-y\leq 0$ فإن C_f يوجد تحت (Δ).