

**I. Fonction logarithme népérien****1) Définition :**

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  . elle admet donc des primitives sur cet intervalle

On appelle fonction logarithme népérien qu'on note  $\ln$  , la primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  qui s'annule en 1 .

**Conséquences :**

- La fonction  $\ln$  est définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$  ; sa dérivée est la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\forall x \in ]0; +\infty[ ; (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- $\ln(1) = 0$

**2) Première propriété de la fonction  $\ln$** 

Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  ,  $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$  .

Donc la fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$

**Conséquences**

Pour tous réels strictement positifs  $a$  et  $b$  , on a :  $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$  et  $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

Pour tout  $x > 1$  , on a  $\ln x > 0$  et pour tout  $0 < x < 1$  , on a  $\ln x < 0$

**Exercice 1 :**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\ln(3-x) < 0$

**Propriété :**

Si  $u$  est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle  $I$  , alors la fonction

composée  $\ln(u)$  est dérivable sur  $I$  et on a :  $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

**Exercice 2 :**

Dans chacun des cas suivants, préciser le domaine de définition de  $f$  et calculer sa dérivée

$$f(x) = \ln(x+4) \quad ; \quad f(x) = \ln x + 4 \quad ; \quad f(x) = \ln(x^2 + 4) \quad ;$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x+4}\right) \quad ; \quad f(x) = \ln|x+4|$$

**Propriétés :**

Si  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et ne s'annule pas sur  $I$  alors :

- $\forall x \in I : (\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$

- Les primitives de la fonction  $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$  s'écrivent sous la forme :

$$x \mapsto \ln|u(x)| + c \quad / \quad c \in \mathbb{R}$$

**Exercice 3 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  .

Déterminer toutes les primitives de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 4 :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1; 1[$  par  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

- Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$
- En déduire toutes les primitives de  $f$  sur  $] -1; 1[$
- Déterminer la primitive  $F$  de la fonction  $f$  qui vérifie  $F(0) = 1$

**Exercice 5 :**

Dans chacun des cas suivants, donner un intervalle sur lequel  $f$  a des primitives, et donner une primitive de  $f$

$$f(x) = \frac{2}{2x-3} ; f(x) = \frac{2x}{x^2+1} ; f(x) = \frac{\ln x}{x} ; f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

**3) Relations importantes****Propriétés**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs. On a :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n$$

avec  $a_1, a_2, \dots$  et  $a_n$  sont des réels strictement positifs

$$\ln(a^n) = n \ln a, \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{Z}$$

$$\forall r \in \mathbb{Q}; \ln(a^r) = r \ln a. \text{ en cas particulier } \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$$

**Exercice 6 :**

Simplifier les expressions suivantes :

$$\ln 2 + \ln \frac{1}{2} ; \ln 2 + \ln 4 - \ln 8 ; \ln\left(\frac{1}{3}\right) + 2 \ln \sqrt{3} ; \ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3})$$

**Exercice 7 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$

Etudier le signe de  $f(x)$ .

**4) Etude de la fonction  $\ln$** 

- Théorème admis:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

En déduire que :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  la courbe admet une asymptote verticale d'équation  $x = 0$

- $\forall x \in ]1; +\infty[$   $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$  d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

la courbe admet une branche parabolique de direction  $(Ox)$  au voisinage de  $+\infty$

Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

- Le nombre  $e$  :**

La fonction  $\ln$  est continue, strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  et  $\ln(]0; +\infty[) = ]-\infty; +\infty[$

Donc l'équation  $\ln x = 1$  admet une seule solution dans  $]0; +\infty[$  qu'on note  $e$  :

$$e \approx 2,7182818285\dots$$

$e$  est un nombre irrationnel et  $\ln e = 1$

**Remarque:**

Les valeurs approchées  $\ln 2 \approx 0,7$  et  $\ln 3 \approx 1,1$  sont à connaître.

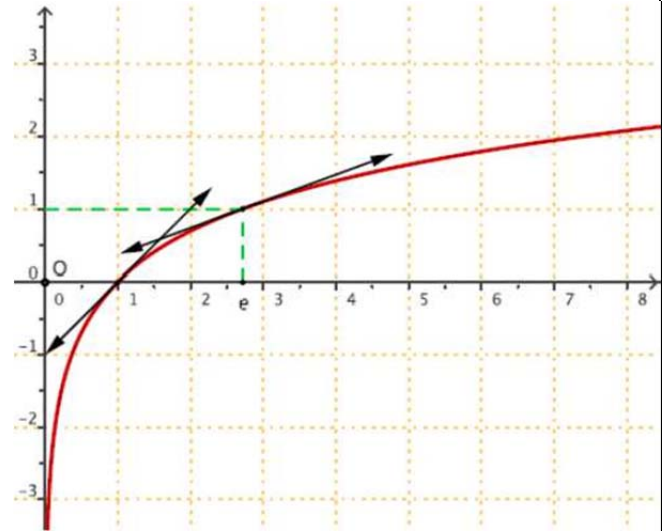
La tangente à la courbe de la fonction  $\ln$  au point d'abscisse 1 est  $(T): y = x - 1$

La tangente au point d'abscisse  $e$  a pour équation :  $y = \frac{1}{e}x$

- Tableau de variation:

$x$	0	1	$e$	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			+	
$\ln(x)$	       $-\infty$		0	1 $\rightarrow +\infty$

- Courbe représentative:

**Exercice 8 :**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et les inéquations suivantes :

$$\ln x \leq 1 \quad ; \quad \ln x = 2 \quad ; \quad 3 - \ln x \leq 8 \quad ; \quad \ln(2x+1) = 1$$

$$\ln(x^2) = -1 \quad ; \quad \ln(x(x+1)) = 0 \quad ; \quad \ln x + \ln(x+1) = 0$$

**5) Propriétés**

La fonction  $\ln$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ . En particulier, en 1 .

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{d'où } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad (\text{on pose } h = 1+x)$$

**Exercice 9 :**

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} - \ln x \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{x^2 + 1}{3 + 2x^2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln x}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x}$$

**Exercice 10 :**

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{2} \ln x \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3 \ln x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \quad ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( \frac{x-1}{x} \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (x \ln(x^2 - x))$$

**Théorème**

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

Exemples :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x = 0$$

**II. Etude et représentation de fonctions composées****Exercice 11 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son domaine de définition. En déduire les asymptotes à sa courbe ( $C_f$ )

Dresser le tableau de variation de  $f$

Tracer ( $C_f$ ) ainsi que sa tangente au point d'abscisse  $e$

**Exercice 12 :**

Dans tous les cas suivants, étudier et représenter graphiquement la fonction  $f$  :

$$\text{a) } f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad , \text{ b) } \begin{cases} f(x) = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad , \text{ c) } f(x) = \ln|x^2 - 3x + 2|$$

**III. Fonction logarithme de base  $a$** **1. Définition**

Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1

La fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$  s'appelle fonction logarithme de base  $a$ . Notée:  $\log_a$

**2. Remarque :**

La fonction logarithme népérien est la fonction logarithme de base  $e$ . En fait :

$$\forall x \in ]0; +\infty[; \log_e(x) = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} ; \log_a(a) = 1$$

$$\text{Et } \forall r \in \mathbb{Q} ; \log_a(a^r) = r$$

**3. Propriétés:**

soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1

Pour tout  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $r$  de  $\mathbb{Q}$ , on a :

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad , \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad , \quad (x^r) = r \log_a(x)$$

**4. Etude de la fonction  $\log_a$** 

Dérivée de la fonction  $\log_a$

$$\forall x \in ]0; +\infty[ : [\log_a(x)]' = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$$

Tableau de variation

Courbe représentative

**5. Cas particulier : Fonction logarithme décimal****Définition**

La fonction logarithme de base 10, s'appelle fonction logarithme décimal notée  $\log$

**Remarques**

$$\forall x \in ]0; +\infty[ \quad \log x = \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln 10} \quad \frac{1}{\ln 10} \approx 0,434$$

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad \log 10^m = m$$

**Exercice 11:**

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\text{Log}(n-2) + \text{Log}(n+3) = 2$

2. Résoudre dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  le système : 
$$\begin{cases} x + y = 65 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$$