

الدوال اللوغاريتمية

1. تعريف:

الدالة الأصلية للدالة: $x \rightarrow \frac{1}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$ التي تنعده في 1 تسمى

الدالة اللوغاريتمية النيبيريتوييرمز لها بالرمز \ln أو \log

$$\ln(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (\ln(x))' = \frac{1}{x} \\ \ln(1) = 0 \end{cases}$$

2. خصائص:

مجموعة تعريف الدالة \ln هي $]0; +\infty[$
الدالة \ln متصلة على $]0; +\infty[$
الدالة \ln قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$
الدالة \ln تزايدية قطعاً على $]0; +\infty[$

$\ln(1) = 0$
 $\forall x \in]0; +\infty[\quad \ln'(x) = \frac{1}{x}$ و

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^*_+$ لدينا :

$$\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$\ln(x) > \ln(y) \Leftrightarrow x > y$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$r \in \mathbb{Q} \quad \ln(x)^r = r \ln(x)$$

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

ملاحظة

لدينا الدالة \ln تزايدية قطعاً على $]0; +\infty[$ ومتصلة و $\ln(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$ ومنه المعادلة $\ln x = 1$ تقبل حلاً

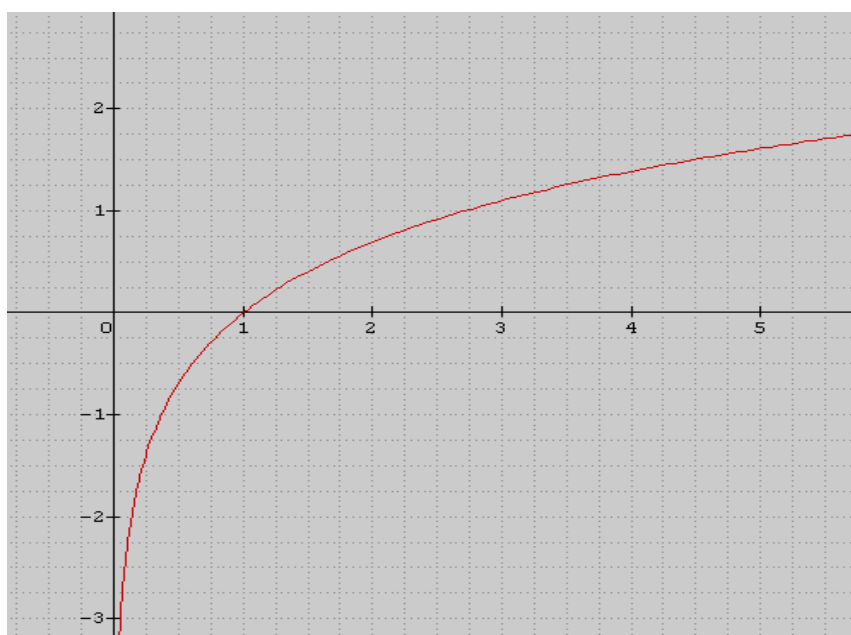
وحيثاً في $]0; +\infty[$ ويرمز له بالحرف e اذن $\ln e = 1$

نقبل أن e ليس عدداً جذرياً وقيمته المقربة هي $e \approx 2,71828$

✚ اذن جدول تغيرات الدالة اللوغاريتمية

x	0	1	e	$+\infty$
f	$-\infty$	0	1	$+\infty$

✚ منحنى الدالة \ln



3. المشتقة :

f قابلية للاشتقاق على مجال I بحيث $f(x) \neq 0$:

$$\forall x \in I [\ln(f(x))] = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

4. النهايات :

الدالة \ln دالة متصلة وتزايدية على $]0; +\infty[$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

5. الدالة اللوغاريتمية للأساس a

✓ لكل $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ الدالة $\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ المعرفة على $]0; +\infty[$ تسمى **دالة**

اللوغاريتم للأساس a ويرمز لها بالرمز \log_a

✚ إذا كان $a = e$ فإن دالة اللوغاريتم للأساس e هي **دالة اللوغاريتم النبيري**.

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \text{Log}_e(x) = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$$

✚ إذا كان $a = 10$ فإن الدالة تسمى **دالة اللوغاريتم العشري**.

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \log x = \text{Log}_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

• جميع خصائص دالة اللوغاريتم النبيري تبقى صالحة لدالة اللوغاريتم للأساس a

$$\log_a(a) = 1 \quad ; \log_a(1) = 0$$

$$\forall (x; y) \in (]0; +\infty[)^2 \quad \forall r \in \mathbb{Q} \quad \text{Log}_a(xy) = \text{Log}_a(x) + \text{Log}_a(y)$$

$$\text{Log}_a\left(\frac{x}{y}\right) = \text{Log}_a(x) - \text{Log}_a(y) \quad ; \quad \text{Log}_a(x^r) = r \text{Log}_a(x)$$

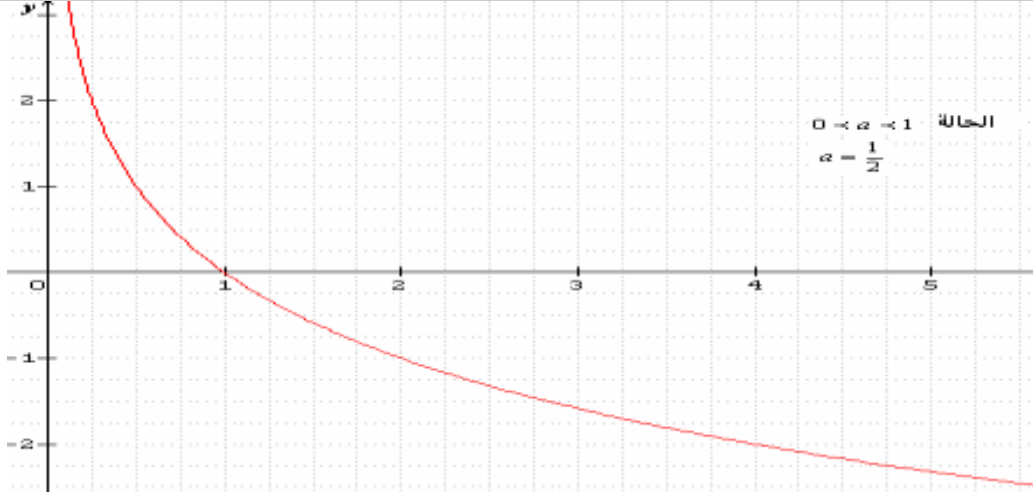
6. دراسة الدالة اللوغاريتمية للأساس a

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \text{Log}_a'(x) = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{لدينا}$$

الحالة الأولى

إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\ln a < 0$ ومنه $\text{Log}_a' < 0$ إذن $\forall x \in]0; +\infty[$ تناقصية قطاعا على $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Log}_a x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Log}_a x = +\infty$$



الحالة الثانية

إذا كان $a > 1$ فإن $\ln a > 0$ ومنه $\text{Log}_a' > 0$ إذن $\forall x \in]0; +\infty[$ تزايدية قطاعا على $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Log}_a x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Log}_a x = -\infty$$

