

I. Probabilité

1) Généralités

Lors d'une **expérience aléatoire** :

- L'**univers** Ω est l'ensemble des **éventualités**.
- Un **événement** A est une partie de l'univers Ω .
- Un événement **élémentaire**, est un événement ne comportant qu'un seul élément.
- L'événement **contraire** de l'événement A est l'événement noté \bar{A} formé de tous les éléments de Ω n'appartenant pas à A .
- L'événement $A \cap B$ (noté aussi "A et B") est l'événement formé des éléments de Ω appartenant à A et à B .
- L'événement $A \cup B$ (noté aussi "A ou B") est l'événement formé des éléments de Ω appartenant au moins à l'un des événements A ou B .
- Deux événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.
- Si $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ et si à chaque éventualité e_i on associe un nombre $p(e_i)$ tel que: $0 \leq p(e_i) \leq 1$ et $p(e_1) + p(e_2) + \dots + p(e_n) = 1$, On dit que l'on a défini une **loi de probabilité** sur Ω .
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

2) Propriétés :

Pour tous événements A et B :

- $P(\emptyset) = 0$; $P(\Omega) = 1$
- $0 \leq p(e_i) \leq 1$; $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
(si A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$)
- Pour une loi **équirépartie** : $p(A) = \frac{\text{nbre d'éléments de } A}{\text{nbre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$

3) Variable aléatoire

Définition : Une variable aléatoire X définie sur un univers Ω est une fonction qui à chaque éventualité associe un réel x_i . La probabilité pour que X prenne la valeur x_i est alors notée $p(X = x_i)$ ou p_i .

Définir la **loi de probabilité** de X , c'est donner (sous forme d'un tableau) la probabilité de chacun des événements " $X = x_i$ ".

x_i	x_1	x_2	...	x_k
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_k

- Espérance mathématique de X : $E(X) = \sum_{i=1}^{i=k} p_i \times x_i$

- Variance de X : $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i^2 - (E(X))^2$
- Écart-type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple :

On lance 3 fois de suite un dé. Le joueur gagne 6 dirhams s'il n'obtient aucun 1 et aucun 2 et il perd 3 dirhams dans le cas contraire.

La variable aléatoire X égale au gain du joueur, ne peut prendre que les valeurs -3 et 6.

$$\text{On a : } p(X=6) = \frac{4^3}{6^3} = \frac{8}{27} \text{ et } p(X=-3) = 1 - p(X=6) = \frac{19}{27}$$

x_i	6	-3	Total
$p(X=x_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{19}{27}$	1

$$E(X) = -3 \times \frac{19}{27} + 6 \times \frac{8}{27} = -\frac{1}{3}$$

$$V(X) = (-3)^2 \times \frac{19}{27} + 6^2 \times \frac{8}{27} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{152}{9} \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{\frac{152}{9}} = \frac{2\sqrt{38}}{3}$$

II. Probabilités conditionnelles**1. Définition:**

Etant donné deux événements A et B ($B \neq \emptyset$) d'un univers Ω . On appelle probabilité de B sachant A , le réel noté $p_A(B)$ (ou $p(B/A)$) tel que : $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

$$\text{On a alors : } p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$$

2. Formule des probabilités totales

Si $A_1; A_2; \dots; A_n$ forment une partition de Ω (2 à 2 incompatibles et leur union forme Ω),

Alors pour tout événement B , on a :

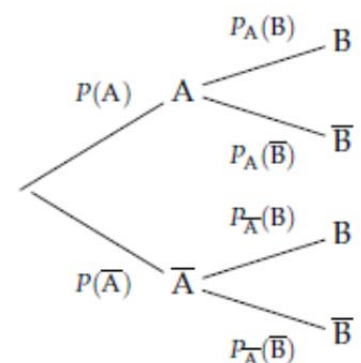
$$\begin{aligned} p(B) &= p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B) \\ &= p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \dots + p(A_n) \times p_{A_n}(B) \end{aligned}$$

3. Représentation par un arbre pondéré

Le cas le plus fréquent correspond à la partition la plus simple

(A et \bar{A}). Si on connaît les probabilités de B et \bar{B} par

l'intermédiaire de A et \bar{A} , on a l'arbre suivant :



- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.

$$p(A) \times p_A(B) = p(A \cap B)$$

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).

$$p_A(B) + p_A(\bar{B}) = 1$$

- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.

$$p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)$$

Exemple :

On dispose de trois urnes A, B et C la première contient 1 boule rouge et 5 boules vertes, la deuxième contient 3 boules rouges et une boule verte, et la troisième contient 1 boule rouge et 2 boules vertes.

On choisit l'une des urnes au hasard et on tire une boule de cette urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

Soient A, B et C les événements correspondants au choix de l'urne. Ils forment une partition de l'univers et on a $p(A) = p(B) = p(C) = \frac{1}{3}$.

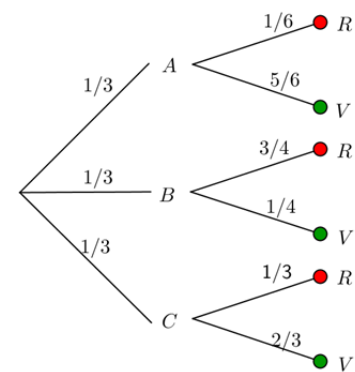
Soit R l'événement « tirer une boule rouge ». La formule des probabilités totales nous donne:

$$p(R) = p(A \cap R) + p(B \cap R) + p(C \cap R),$$

Donc: $p(R) = p(A) \times p_A(R) + p(B) \times p_B(R) + p(C) \times p_C(R)$.

Or $p_A(R) = \frac{1}{6}$, $p_B(R) = \frac{3}{4}$ et $p_C(R) = \frac{1}{3}$.

On a donc $p(R) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$.



4. Indépendance de deux événements

Deux événements A et B sont **indépendants** si et seulement si :

$$p_A(B) = p(B) \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Exemple :

Une association de 96 membres propose différentes activités à ses adhérents, dont l'athlétisme et le basketball.

Douze membres s'inscrivent pour l'athlétisme, Trente-deux pour le basketball dont quatre pour les deux.

On prend au hasard la fiche d'un adhérent. On note A et B les événements :

- A « l'adhérent est inscrit pour l'athlétisme ».
- B « l'adhérent est inscrit pour le basketball ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ? En est-il de même pour A et \bar{B} ?

On peut représenter les événements dans un tableau double entrée ci-contre

On calcule les probabilités suivantes : $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$

	A	\bar{A}	Total
B	4	28	32
\bar{B}	8	56	64
Total	12	84	96

III. Loi binomiale

- ❖ On appelle épreuve de **Bernoulli** toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraire l'une de l'autre)
- ❖ On appelle schéma de Bernoulli toute répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes

Étant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès S est p . Le schéma de Bernoulli consistant à répéter n fois de manière indépendante cette épreuve.

Si on note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès S , la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p et est notée $\mathcal{B}(n; p)$

- Probabilité d'obtenir k succès : $p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
- Espérance de X : $E(X) = \bar{X} = np$
- Variance et écart-type de X : $V(X) = np(1-p)$; $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Exercice :

Un sac contient 6 boules blanches et 4 boules noires. On prélève au hasard et simultanément 3 boules de ce sac et on considère la variable aléatoire X associée au nombre de boules blanches tirées

1. Déterminer $X(\Omega)$ (les valeurs x_i que peut prendre la variable X)
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X
3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$
4. On considère l'événement A : "les 3 boules sont blanches" et on répète cette expérience exactement cinq fois

Soit Y la variable aléatoire associée au nombre de fois l'apparition de l'évènement A

- a) Donner la loi de probabilité de Y
- b) Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de Y