* Le nombre derivé

f est derivable au point $a \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$

tel que $l \in \mathbb{R}$

* La derivabilité à droite ou à gauche

* Si $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \Rightarrow f$ est derivable à droite au point a et $l = f'_d(a)$

* Si $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \Rightarrow f$ est derivable à gauche au point a et $l = f'_g(a)$

* * Si $f'_d(a) = f'_g(a) \Leftrightarrow f$ est derivable au point a

* L'équation de la tangente

$(T) : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

* L'interpretation graphique

$\lim\limits_{x \to a^\pm} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

- 0 : (c) admet une demi tangente horizontale (à droite / à gauche) au point $M(a, f(a))$
- $l \in \mathbb{R}^*$: (c) admet une demi tangente (à droite / à gauche) au point $M(a, f(a))$ de coefficient directeur égal à l
- $\pm\infty$: (c) admet une demi tangente verticale (à droite / à gauche) au point $M(a, f(a))$
  - orienté vers le haut : si a et ∞ ont le même signe
  - orienté vers le bas : si a et ∞ ont deux signes differents

* La derivée de la fonction reciproque

Si $\begin{cases} f \text{ est derivable sur } I \\ \forall x \in I,\ f'(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}$ est derivable sur $J = f(I)$

Si $\begin{cases} f \text{ est derivable au point } a \\ f'(a) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}$ est derivable au point $b = f(a)$

et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Exercice global

On considere la fonction f definie sur $[1; +\infty[$ par : $f(x) = x + 10 + 2\sqrt{x-1}$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Etudier la derivabilité de f à droite au point $a = 1$ et interpreter geometriquement ce resultat.
3. a. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]1; +\infty[$.
   b. Dresser le tableau de variations.
4. Donner l'équation de la tangente au point de l'abscisse $a = 2$
5. Montrer que f admet une fonction reciproque f^{-1} definie sur un intervalle J à determiner
6. a. Montrer que f^{-1} est derivable en 14
   b. Calculer $(f^{-1})'(14)$

3 L'etude d'une fonction

I. Les branches infinies

★ Definition:
On dit que (c) admet une branche infinie lorsque x ou $f(x)$ tend vers l'infini

★ Classification des branches infinies

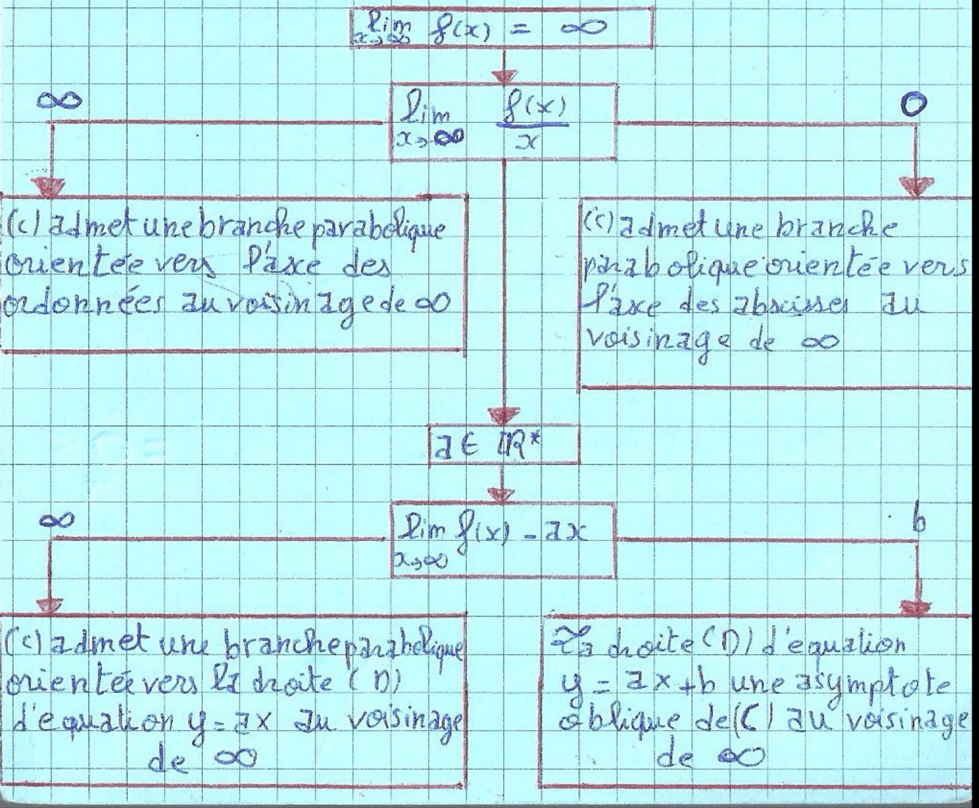
- asymptote verticale

si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ alors (c) admet une asymptote verticale d'equation $x=a$

- asymptote horizontale

si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ alors (c) admet une asymptote horizontale d'equation $y=b$ au voisinage de $\pm\infty$

- asymptote oblique et les branches paraboliques



II. Concavité de la courbe d'une fonction

Pour etudier la concavité de la courbe d'une fonction on calcul $f''(x)$ et on etudie son signe.

- Si $f''>0$ on dit que (c) est convexe
- Si $f''<0$ on dit que (c) est concave
- Si f'' s'annule et change son signe au point de l'abscisse a, on dit que $I(a,f(a))$ est un point d'inflexion

Remarque

Pour determiner l'intersection entre la courbe (c) et l'axe des abscisses, on resoud l'equation $f(x)=0$

Exemple à apprendre

Montrer que (C) admet un point d'inflexion I à determiner;

puisque f'' s'annule et change son signe au point de l'abscisse $a=\dots$ donc (c) admet un point d'inflexion $I(a, f(a))$

Montrer que la droite $y=ax+b$ est une asymptote oblique de (C) au voisinage de ∞

calculer $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

Tableau de concavité

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
concavité de (c)		concave	$I(a,f(a))$	convexe	