.01

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n} \ ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

.01 بين أن: $0 \leq u_n \leq 3 \quad : \quad \forall n \geq 0$.

.02 نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يلي: $\forall n \in \mathbb{N} \ ; v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية وحدد عناصرها المميزة . ب - أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

.02

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+(u_n)^2} \ ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) بين أن: $\forall n \geq 0 : u_n > 0$.

2) بين أن: $(u_n)_{n\geq 0}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة.

3) أ- بين أن: $\forall n \geq 0 : u_{n+1} \leq \dfrac{u_n}{2}$. ب - استنتج أن: $\forall n \geq 0 : u_n \leq \dfrac{u_0}{2^n}$. ج- استنتج نهاية المتتالية u_n.

.03

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \dfrac{u_n}{5+4u_n} \end{cases}$

.01 أ- أحسب: u_1 و u_2. ب - بين أن: $u_n > 0 \quad : \quad \forall n \geq 0$. ج- بين أن: u_n تناقصية. د- استنتج تقارب المتتالية u_n.

.02 أ- بين أن: $\forall n \geq 0 : u_{n+1} \leq \dfrac{1}{5} u_n$. ب - بين أن: $\forall n \geq 0 : u_n \leq 3\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

ج- استنتج أن: $\forall n \geq 0 : 0 < u_n \leq 3\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$. د - أوجد النهاية التالية: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

لتكن u_n و v_n متتاليتين معرفتين بما يلي : لكل n من $\mathbb{N}$: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+1}{4} \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{3v_n+1}{4} \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

- طريقة 1 لتحديد نهاية u_n .

1. لنعتبر المتتالية s_n المعرفة ب : $s_n = u_n + v_n \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$. بين بالترجع أن المتتالية s_n ثابتة .

2. لنعتبر المتتالية d_n المعرفة ب : $d_n = v_n - u_n \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$. بين أن المتتالية d_n هندسية محددا عناصرها المميزة .

3. استنتج : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n$. s_n

4. أ- أكتب u_n بدلالة s_n و d_n ؛ ثم u_n بدلالة n . ب - أكتب v_n بدلالة s_n و d_n ؛ ثم v_n بدلالة n . ج- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

- طريقة 2 لمعرفة نهاية u_n مبيانيا .

لنعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$. الرسم أسفله (C_f) يمثل منحنى للدالة f و المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = x$: (Δ) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ و حدة القياس 5 cm

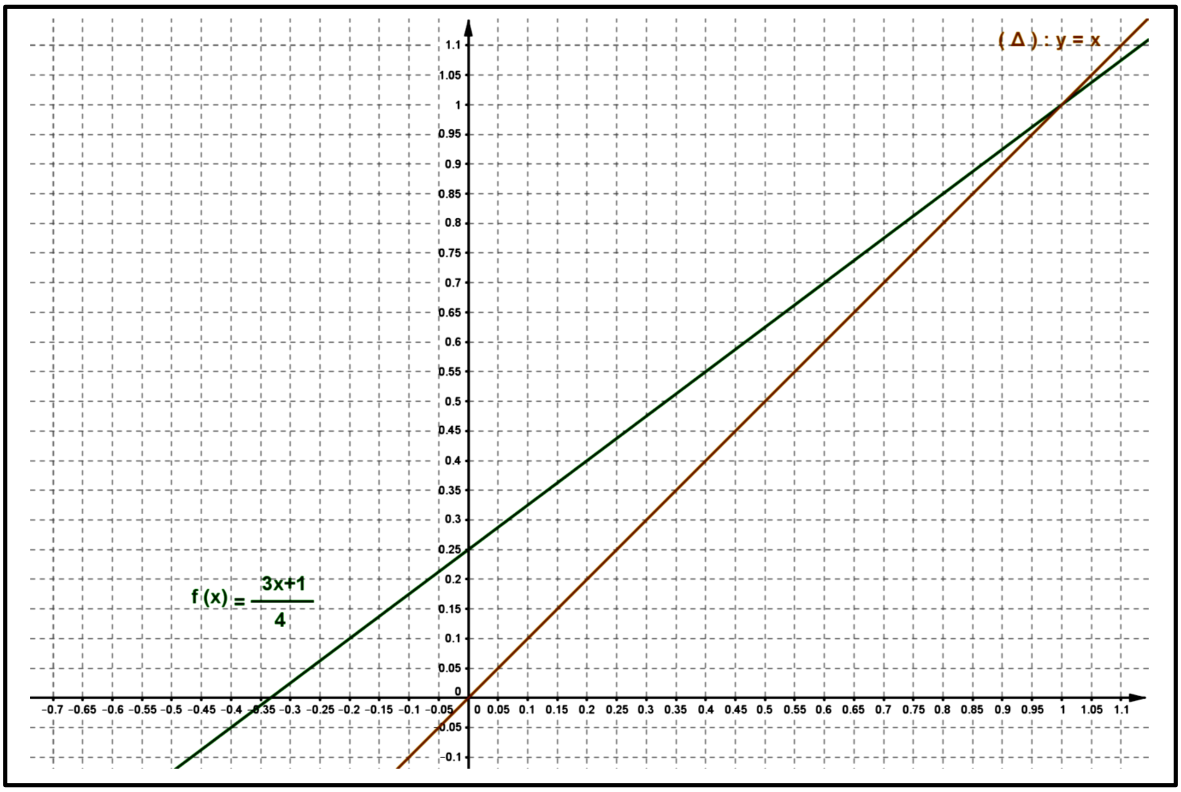
1. مثل على محور الأفاصيل النقط A_0 و A_1 و A_2 و A_3 و A_4 التي أراتبها منعدمة و أفاصيلها هي u_0 و u_1 و u_2 و u_3 و u_4 على التوالي . مع $u_1 = \frac{1}{4} = 0,25$ و $u_2 = \frac{7}{16} \simeq 0,44$ و $u_3 = \frac{37}{64} \simeq 0,58$ و $u_4 = \frac{175}{256} \simeq 0,69$. على المنحنى ضع المسلك الذي نتبعه للحصول على قيم هذه الحدود و هي ممثلة على محور الأفاصيل بدون استعمال قيم u_1 و u_2 و u_3 و u_4 .

2. ما هو التظنن الذي نحصل عليه ؟

- طريقة 3 لتحديد نهاية u_n .

1. أ- أعط جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$. ب - بين أن : $f([0;1]) \subset [0;1]$. ج- أكتب المتتالية (u_n) مستعملا الدالة f .

2. أ- . بين ان : $0 \le u_n \le 1 \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}$. ب - بين أن (u_n) تزايدية . ج- استنتج أن: (u_n) لها نهاية منتهية ℓ . د- بين أن : $\ell \le 1$ ه- حدد قيمة ℓ .



ملحوظة :

يمكنك أن تبين أن :

- v_n مصغورة ب 1 .
- v_n تناقصية .
- v_n متقاربة .
- ثم تحدد نهاية v_n .

.01

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n} \; ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

.01 نبين أن: $0 \leq u_n \leq 3 \quad : \quad \forall n \geq 0$.

نستدل على ذلك بالترجع :

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n = 0$.

لدينا : $u_0 = 3$ ومنه : $0 \leq u_0 \leq 3$ و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$.

- نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي $0 \leq u_n \leq 3$ صحيحة (معطيات الترجع)
- نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$. أي نبين أن : $0 \leq u_{n+1} \leq 3$.

لدينا : حسب معطيات الترجع $0 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow 0+1 \leq u_n + 1 \leq 3+1$.

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{u_n+1} \leq \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow 2\times\frac{1}{4} \leq 2\times\frac{1}{u_n+1} \leq 2\times 1 \quad ; (2>0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{u_n+1} \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 2 \leq 3$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 3$$

إذن العلاقة صحيحة ل $n+1$.

خلاصة : $\forall n \geq 0 \quad : \quad 0 \leq u_n \leq 3$

.02 نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يلي: $\forall n \in \mathbb{N} \; ; v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

أ- نبين أن المتتالية (v_n) هندسية وحدد عناصرها المميزة .

لدينا :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

$$= \frac{\frac{2}{u_n+1} - 1}{\frac{2}{u_n+1} + 2}$$

$$= \frac{2 - u_n - 1}{2 + 2u_n + 2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{-u_n+1}{u_n+2}$$
$$=\frac{-1}{2}\times\frac{u_n-1}{u_n+2}$$
$$=\frac{-1}{2}\times v_n$$

ومنه : $v_{n+1}=\frac{-1}{2}\times v_n$

خلاصة : المتتالية (v_n) هندسية أساسها : $q=-\frac{1}{2}$ وحدها الأول هو $u_0=3$.

ب- نكتب v_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

- المتتالية (v_n) هندسية أساسها : $q=-\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+2}=\frac{3-1}{3+2}=\frac{2}{5}$ إذن حدها العام هو

$$v_n=\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-n_0}\times v_{n_0} \qquad (n_0=0)$$
$$=\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-0}\times\frac{2}{5} \qquad \left(v_{n_0}=v_0=\frac{2}{5}\right)$$
$$=\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}\times\frac{2}{5}$$

خلاصة : كتابة v_n بدلالة n $v_n=\left(\frac{-1}{2}\right)^n\times\frac{2}{5}$

- ثم نستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\times\frac{2}{5}=0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\times\frac{2}{5}=0$ (لأن $-1<q<1$ حسب خاصية)

خلاصة : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$

.02

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة كما يلي: $\begin{cases}u_0>0\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2+(u_n)^2}\end{cases}\ ;\forall n\in\mathbb{N}$

1) نبين أن: $\forall n\geq0:u_n>0$.

نستدل على ذلك بالترجع :

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n=0$.

لدينا : $u_0>0$ و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة ل $n=0$.

- نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي $u_n>0$ صحيحة (معطيات الترجع)

- نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$. أي نبين أن : $u_{n+1}>0$.

لدينا : حسب معطيات الترجع $u_n>0$ و $u_n>0 \Rightarrow 2+(u_n)^2$.

$$\Rightarrow \frac{u_n}{2+(u_n)^2}>0$$
$$\Rightarrow u_{n+1}>0$$

إذن العلاقة صحيحة ل $n+1$.

خلاصة : $\forall n\geq 0 : u_n>0$

2) نبين أن: u_n تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة.

- نبين أن: u_n تناقصية :

لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{u_n}{2+(u_n)^2}-u_n \\ &= \frac{u_n-u_n\left(2+(u_n)^2\right)}{2+(u_n)^2} \\ &= \frac{u_n\left(1-2-(u_n)^2\right)}{2+(u_n)^2} \\ &= \frac{-u_n\left(1+(u_n)^2\right)}{2+(u_n)^2}<0 \quad ; \quad (u_n>0) \end{aligned}$$

ومنه : $u_{n+1}-u_n<0$ أي $u_{n+1}<u_n$.

خلاصة : u_n تناقصية

- نستنتج أنها متقاربة.

لدينا :

- $\forall n\geq 0 : u_n>0$ أي مصغورة ب 0 .
- u_n تناقصية .

ومنه : u_n متقاربة (حسب خاصية) .

خلاصة : u_n متقاربة .

3) ...

أ- نبين أن: $\forall n\geq 0 : u_{n+1}\leq \frac{u_n}{2}$.

لدينا :

$$u_n>0 \Rightarrow (u_n)^2>0$$
$$\Rightarrow 2+(u_n)^2>2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2+(u_n)^2} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow u_n \times \frac{1}{2+(u_n)^2} < u_n \times \frac{1}{2} \ ; \ (u_n > 0)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < \frac{u_n}{2}$$

و منه : $u_{n+1} \le \frac{u_n}{2}$.

خلاصة : $\boxed{\forall n \ge 0 : u_{n+1} \le \frac{u_n}{2}}$

ب- نستنتج أن: $\forall n \ge 0 : u_n \le \frac{u_0}{2^n}$.

لدينا : $u_{n+1} \le \frac{u_n}{2}$

- بالنسبة ل : $n = 0$ إذن : $\cancel{u_1} \le \frac{u_0}{2}$.
- بالنسبة ل : $n = 1$ إذن : $\cancel{u_2} \le \frac{\cancel{u_1}}{2}$.
- بالنسبة ل : $n = 2$ إذن : $\cancel{u_3} \le \frac{\cancel{u_2}}{2}$.
- $\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
- بالنسبة ل : $n-2$ إذن : $\cancel{u_{n-1}} \le \frac{\cancel{u_{n-2}}}{2}$.
- بالنسبة ل : $n-1$ إذن : $u_n \le \frac{\cancel{u_{n-1}}}{2}$.

جداء المتفاوتات السابقة طرف بطرف مع العلم أن كل طرف موجب نحصل بعد الاختزال

على ما يلي : $u_n \le \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2}}_{\text{n fois}} u_0$ أي $u_n \le \frac{u_0}{2^n}$.

خلاصة : $\boxed{\forall n \ge 0 : u_n \le \frac{u_0}{2^n}}$

ملحوظة : يمكن الاستدلال على ذلك بالترجع .

ج- نستنتج نهاية المتتالية u_n.

لدينا :

- $u_n > 0$ حسب السؤال الأول
- $u_n \le \frac{u_0}{2^n}$ حسب السؤال الأخير

- إذن : $0 < u_n \le \dfrac{u_0}{2^n}$.
- $\left(-1 < \dfrac{1}{2} < 1\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times u_0 = 0$ = $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_0}{2^n}$. حسب خاصية .

ومنه حسب أحد مصادق التقارب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

خلاصة : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

.03

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة كما يلي:
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \dfrac{u_n}{5+4u_n} \end{cases}$$

.01

أ- أحسب: u_1 و u_2.

لدينا: $u_1 = \dfrac{u_0}{5+4u_0} = \dfrac{3}{5+4\times3} = \dfrac{3}{17}$ و $u_2 = \dfrac{u_1}{5+4u_1} = \dfrac{3}{17}\times\dfrac{1}{5+4\times\dfrac{3}{17}} = \dfrac{3}{97}$.

خلاصة : $u_1 = \dfrac{3}{17}$ و $u_2 = \dfrac{3}{97}$.

ب- بين أن: $u_n > 0$: $\forall n \ge 0$.

نستدل على ذلك بالترجع :

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n = 0$.

لدينا : $u_0 = 3 > 0$ و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$.

- نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي $u_n > 0$ صحيحة (معطيات الترجع)
- نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$. أي نبين أن : $u_{n+1} > 0$.

لدينا : حسب معطيات الترجع : $(u_n > 0$ و $5+4u_n > 0) \Rightarrow u_n > 0$.

$$\Rightarrow \frac{u_n}{5+4u_n} > 0$$
$$\Rightarrow u_{n+1} > 0$$

إذن العلاقة صحيحة ل $n+1$.

خلاصة : $\forall n \ge 0 : u_n > 0$

ج- بين أن: u_n تناقصية.

لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{5+4u_n} - u_n$$
$$= \frac{u_n - u_n(5+4u_n)}{5+4u_n}$$

$$= \frac{u_n(1-5-4u_n)}{5+4u_n}$$

$$= \frac{-4u_n(1+u_n)}{5+4u_n} < 0 \quad ; \quad (u_n > 0)$$

ومنه : $u_{n+1} - u_n < 0$ أي $u_{n+1} < u_n$.

خلاصة : u_n تناقصية

د- استنتج تقارب المتتالية u_n.

لدينا :

- $u_n > 0$ حسب السؤال الأول إذن u_n مصغورة
- u_n تناقصية.
- u_n متقارب (حسب خاصية) .

خلاصة : u_n متقارب

02...

أ- بين أن: $\forall n \geq 0 : u_{n+1} \leq \frac{1}{5}u_n$.

لدينا :

$$u_n > 0 \Rightarrow 5+4u_n > 5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5+4u_n} < \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow u_n \times \frac{1}{5+4u_n} < u_n \times \frac{1}{5} \quad ; \ (u_n > 0)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < \frac{u_n}{5}$$

و منه : $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{5}$.

خلاصة : $\forall n \geq 0 : u_{n+1} \leq \frac{u_n}{5}$

ب- بين أن: $\forall n \geq 0 : u_n \leq 3\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

لدينا : $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$

- بالنسبة ل : $n = 0$ إذن : $\cancel{u_1} \leq \frac{u_0}{5}$.
- بالنسبة ل : $n = 1$ إذن : $\cancel{u_2} \leq \frac{\cancel{u_1}}{5}$.
- بالنسبة ل : $n = 2$ إذن : $\cancel{u_3} \leq \frac{\cancel{u_2}}{5}$.

- $\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
- بالنسبة ل : $n-2$ إذن : $\cancel{u_{n-1}} \leq \frac{\cancel{u_{n-2}}}{5}$.
- بالنسبة ل : $n-1$ إذن : $u_n \leq \frac{\cancel{u_{n-1}}}{5}$.

جداء المتفاوتات السابقة طرف بطرف مع العلم أن كل طرف موجب نحصل بعد الاختزال

على ما يلي : $u_n \leq \underbrace{\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\cdots\times\frac{1}{5}}_{n\ fois}u_0$ أي $u_n \leq \frac{u_0}{5^n}$ ومنه : $u_n \leq \frac{3}{5^n}$ أي : $\forall n \geq 0 : u_n \leq 3\left(\frac{1}{5}\right)^n$

خلاصة : $\boxed{\forall n \geq 0 : u_n \leq 3\left(\frac{1}{5}\right)^n}$

ملحوظة : يمكن الاستدلال على ذلك بالترجع .

ج- استنتج أن: $\forall n \geq 0 : 0 < u_n \leq 3\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

لدينا :

- $u_n > 0$ حسب السؤال الأول
- $u_n \leq \frac{u_0}{2^n}$ حسب السؤال الأخير
- إذن : $0 < u_n \leq \frac{u_0}{2^n}$.

خلاصة : $\boxed{\forall n \geq 0 : 0 < u_n \leq 3\left(\frac{1}{5}\right)^n}$.

د- أوجد النهاية التالية: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

- $\left(-1 < \frac{1}{2} < 1\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_0}{2^n} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \times u_0 = 0$. حسب خاصية .
- ومنه حسب أحد مصادق التقارب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

خلاصة : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

لتكن u_n و v_n متتاليتين معرفتين بما يلي : لكل n من $\mathbb{N}$: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{4} \ ; \ n\in\mathbb{N}\end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3v_n+1}{4} \ ; \ n\in\mathbb{N}\end{cases}$.

- طريقة 1 لتحديد نهاية u_n .

1. لنعتبر المتتالية s_n المعرفة ب : $s_n = u_n + v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
بين بالترجع أن المتتالية s_n ثابتة .
نستدل على ذلك بالترجع :

لدينا : $s_0 = u_0 + v_0 = 0 + 2 = 2$ إذن نبين أن : $s_n = 2$

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n = 0$.

لدينا : $s_0 = u_0 + v_0 = 0 + 2 = 2$ و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$.

- نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي $s_n = 2$ صحيحة (معطيات الترجع)
- نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$. أي نبين أن : $s_{n+1} = 2$.

لدينا :

$$s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} + \frac{3v_n + 1}{4} = \frac{3(u_n + v_n) + 2}{4} = \frac{3s_n + 2}{4} = \frac{3 \times 2 + 2}{4} = 2$$

إذن : $s_{n+1} = 2$

إذن العلاقة صحيحة ل $n+1$.

خلاصة : المتتالية s_n ثابتة مع $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ s_n = u_n + v_n = 2$.

.2 لنعتبر المتتالية d_n المعرفة ب : $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ d_n = v_n - u_n$.

بين أن المتتالية d_n هندسية محددا عناصرها المميزة .

لدينا :

$$d_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4} - \frac{3u_n + 1}{4} = \frac{3(v_n - u_n) + 1 - 1}{4} = \frac{3}{4}(v_n - u_n) = \frac{3}{4} d_n$$

ومنه : $d_{n+1} = \frac{3}{4} d_n$.

خلاصة : المتتالية d_n هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ وحدها الأول $d_n = v_0 - u_0 = 2 - 0 = 2$.

.3 استنتج : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n$.

لدينا : المتتالية d_n هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ إذن : $d_n = d_{n_0} \times q^{n-n_0} = d_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

ومنه : $\left(-1 < \frac{3}{4} < 1\right)$; $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} d_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$.

خلاصة : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$

.4 ...

أ- نكتب u_n بدلالة s_n و d_n ؛ ثم u_n بدلالة n .

لدينا:

$$\left.\begin{matrix} s_n = u_n + v_n \\ d_n = v_n - u_n \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} s_n + d_n = 2v_n \\ s_n - d_n = 2u_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_n = \dfrac{s_n + d_n}{2} & (1) \\ u_n = \dfrac{s_n - d_n}{2} & (2) \end{cases}$$

و منه : $u_n = \frac{s_n - d_n}{2} = \frac{2 - 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}{2} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$ (لأن : $d_n = 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$ و $s_n = 2$ ثابتة)

خلاصة : $u_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

ب- نكتب v_n بدلالة s_n و d_n ؛ ثم v_n بدلالة n.

حسب العلاقة (1): لدينا : $v_n = \frac{s_n + d_n}{2}$ ومنه $v_n = \frac{s_n + d_n}{2} = \frac{2 + 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}{2} = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

خلاصة : $v_n = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

ج- نستنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

- $\left(-1 < \frac{3}{4} < 1\right)$; $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1$.
- $\left(-1 < \frac{3}{4} < 1\right)$; $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1$.

خلاصة : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$.

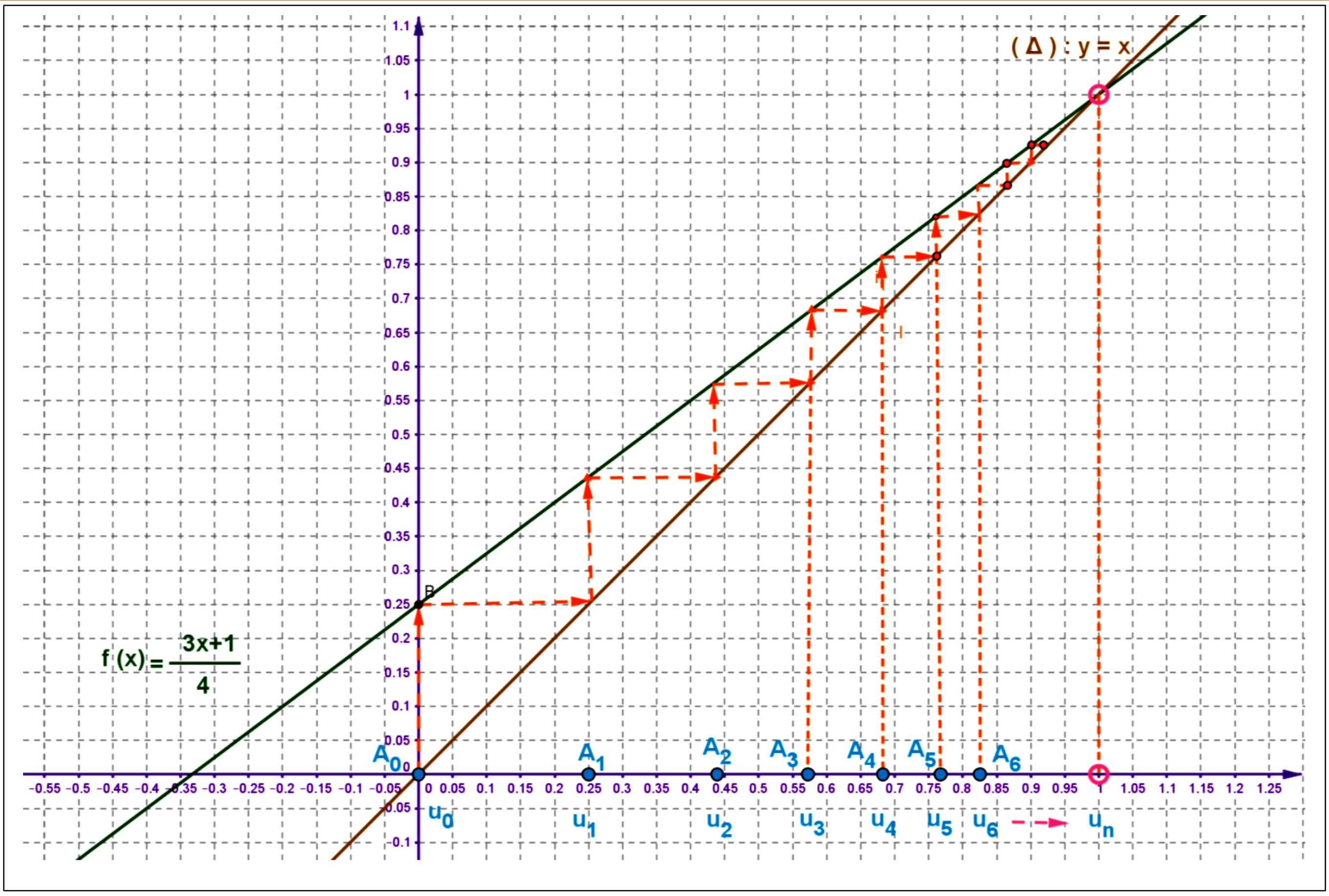
- طريقة 2 لمعرفة نهاية u_n مبيانيا .

لنعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$. الرسم أسفله (C_f) يمثل منحنى للدالة f و المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = x$: (Δ) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ و حدة القياس 5 cm

1. نمثل على محور الأفاصيل النقط A_0 و A_1 و A_2 و A_3 و A_4 التي أراتبها منعدمة و أفاصيلها هي u_0 و u_1 و u_2 و u_3 و u_4 على التوالي . مع $u_1 = \frac{1}{4} = 0,25$ و $u_2 = \frac{7}{16} \simeq 0,44$ و $u_3 = \frac{37}{64} \simeq 0,58$ و $u_4 = \frac{175}{256} \simeq 0,69$.

على المنحنى نضع المسلك الذي نتبعه للحصول على قيم هذه الحدود و هي ممثلة على محور الأفاصيل بدون استعمال قيم u_1 و u_2 و u_3 و u_4 .

أنظر الشكل الموالي :



.2 ما هو التظنن الذي نحصل عليه ؟

- المتتالية u_n تزايدية .
- المتتالية u_n مكبورة ب 1 .
- الحدود u_n محصورة بين 0 و 1 أي $0 \le u_n \le 1$.
- المتتالية متقاربة .
- نهاية المتتالية هي 1 .
- طريقة 3 لتحديد نهاية u_n .

.1 ....

أ- نعطي جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f . لدينا : $f'(x) = \frac{3}{4}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

ب- نبين أن : $f([0;1]) \subset [0;1]$.

لدينا :

- الدالة f متصلة على $[0;1]$ (حدودية)
- الدالة f تزايدية قطعا على $[0;1]$

ومنه : $f([0;1])=[f(0),f(1)]=\left[\frac{1}{4};1\right]\subset[0;1]$.

ج- أكتب المتتالية (u_n) مستعملا الدالة f .

لدينا : $u_{n+1}=f(u_n)$.

.2 ...

أ- بين ان : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ 0\le u_n\le 1$.

نستدل على ذلك بالترجع :

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n=0$.

لدينا : $u_0=0$ ومنه : $0\le u_0=0\le 1$ و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة ل $n=0$.

- نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي $0\le u_n\le 1$ صحيحة (معطيات الترجع)
- نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$. أي نبين أن : $0\le u_{n+1}\le 1$.

لدينا : حسب معطيات الترجع $0\le u_n\le 1\Rightarrow \frac{3}{4}\times 0\le \frac{3}{4}\times u_n\le \frac{3}{4}\times 1$.

$$\Rightarrow \frac{3}{4}\times 0+\frac{1}{4}\le \frac{3}{4}\times u_n+\frac{1}{4}\le \frac{3}{4}\times 1+\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4}\le \frac{3}{4}\times u_n+\frac{1}{4}\le 1$$
$$\Rightarrow 0\le \frac{1}{4}\le u_{n+1}\le 1$$

ومنه : $0\le u_{n+1}\le 1$

إذن العلاقة صحيحة ل $n+1$.

خلاصة : $\forall n\ge 0\ :\ 0\le u_n\le 1$

ب- بين أن (u_n) تزايدية .

لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n+1}{4}-u_n$$
$$=\frac{-u_n+1}{4}\ge 0\quad ;\quad (0\le u_n\le 1\Rightarrow 1-u_n\ge 0)$$

ومنه : $u_{n+1}-u_n\ge 0$ أي $u_{n+1}\ge u_n$.

خلاصة : u_n تزايدية

ج- استنتج أن: (u_n) لها نهاية منتهية ℓ .

لدينا :

- $u_n\le 1$ حسب السؤال الأول إذن u_n مكبورة ب1 .

- u_n تزايدية.
- u_n متقارب (حسب خاصية) .

خلاصة : u_n متقارب إذن لها نهاية منتهية .

د- بين أن : $\ell \leq 1$

بما أن جميع الحدود محصورة بين 0 و 1 إذن ℓ نهاية u_n تحقق $\ell \leq 1$

ه- حدد قيمة ℓ .

لدينا :

- الدالة f متصلة على $[0;1]$.
- $f([0;1]) \subset [0;1]$.
- $u_n = 0 \in [0;1]$.
- u_n متقارب .

إذن : ℓ نهاية u_n هي حل للمعادلة $f(x) = x$; $x \in [0;1]$.

نحل المعادلة :

لدينا :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{3x+1}{4} = x \\ &\Leftrightarrow 3x+1 = 4x \\ &\Leftrightarrow -x+1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

ومنه : $\ell = 1$

خلاصة : قيمة ℓ نهاية المتتالية u_n هي $\ell = 1$.