

**I. الاشتقاق فى نقطة الاشتقاق على اليمين و اليسار:****01. تعريف (تذكير):**

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و $l \in \mathbb{R}$ نقول أن: الدالة f قابلة للاشتقاق فى x_0 إذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \text{ أو أيضا: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l$$

العدد l يسمى العدد المشتق ل f فى x_0 و يرمز له ب: $f'(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$
02. خاصية:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق فى x_0 .

- معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f فى النقطة التى أفصولها x_0 هي: $(T): y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$
 - كل دالة قابلة للاشتقاق فى x_0 تكون متصلة فى x_0 . (العكس ليس دائما صحيح).
 - تكون f قابلة للاشتقاق فى x_0 إذا وفقط إذا كان يوجد عدد حقيقي a و توجد دالة ε حيث:
- $$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad \forall x \in D_f \setminus \{x_0\} \text{ مع } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0. \text{ (و فى هذه الحالة } f'(x_0) = a \text{)}$$

03. الدالة التآلفية ل h بجوار x_0 :

■ تعريف:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق فى x_0 .

- الدالة h المعرفة ب: $h(x) = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماس ل f بجوار x_0 .
- نكتب $f(x) \approx h(x)$ بجوار x_0 (أي h تقرب ل f بجوار x_0)

04. ملحوظة:

منحنى الدالة h هو المستقيم (T) المماس لمنحنى f فى النقطة التى أفصولها x_0

05. نشاط 2:

لنتعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقى x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = -3x + 4 & ; x \geq 1 \\ f(x) = x^2 & ; x < 1 \end{cases}$$

1. أدرس اشتقاق f على يمين $x_0 = 1$. ثم أنشئ نصف المماس.

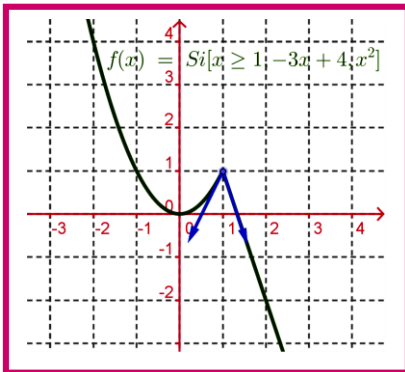
2. أدرس اشتقاق f على يسار $x_0 = 1$. ثم أنشئ نصف المماس.

3. هل f قابلة للاشتقاق فى $x_0 = 1$ ؟

4. حدد معادلتى نصفي المماس لمنحنى الدالة f على يمين و يسار النقطة ذات الأفصول $x_0 = 1$.

الجواب

بطريقة مبيانا





ملاحظة: النقطة ذات الأفصول $x_0 = 1$ تسمى نقطة مزواة .

06. تعريف: (الاشتقاق على اليمين x_0)

لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0, x_0 + \alpha[$ ($\alpha > 0$)

$$f \text{ قابلة للاشتقاق على اليمين في } x_0 \text{ إذا كان } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_d = f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$$

العدد $f'_d(x_0)$ يسمى العدد المشتق على اليمين لـ f .

07. تعريف: (الاشتقاق على يسار x_0)

لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $]x_0 - \alpha, x_0]$ ($\alpha > 0$)

$$f \text{ قابلة للاشتقاق على اليسار في } x_0 \text{ إذا كان } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_g = f'_g(x_0) \in \mathbb{R}$$

العدد $f'_g(x_0)$ يسمى العدد المشتق على اليسار x_0

08. خاصية:

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت ما يلي:

- f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 .
- f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 .
- العدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار في x_0 أي $(f'_d(x_0) = f'_g(x_0))$.

09. تمرين تطبيقي:

أدرس اشتقاق f في $x_0 = 1$ ($f(x) = \sqrt{x}$) ؛ $x_0 = 0$ على اليمين . ($f(x) = |x-1|$ على يسار $x_0 = 1$)

II. اشتقاق دالة على مجال - الدالة المشتقة الأولى لدالة:

01. تعريف:

- إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في كل نقطة x_0 من $]a, b[$ نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]a, b[$.
- f دالة عددية قابلة للاشتقاق على المجال $]a, b[$ إذا كانت:
 - الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]a, b[$
 - f قابلة للاشتقاق على اليمين في a .

02. الدالة المشتقة للدالة:

- تعريف:

الدالة التي تربط كل عنصر x_0 من المجال I بالعدد $f'(x_0)$ تسمى الدالة المشتقة لـ f ونرمز لها بـ f'

- ملحوظة:

إذا كان: $I = [a, b]$ و $I = [a, b[$ و $I =]a, b]$ نصطلح ان: $f'(a) = f'_d(a)$ و $f'(b) = f'_g(b)$

- مثال: الدالة المشتقة لـ $f(x) = x^3$ على \mathbb{R} هي $f'(x) = 3x^2$.



III. جدول الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية: (الجدول 1)

مجموعة تعريف f'	الدالة المشتقة $f'(x) =$	مجموعة تعريف f	الدالة $f(x) =$	مجموعة تعريف f'	الدالة المشتقة $f'(x) =$	مجموعة تعريف f	الدالة $f(x) =$
$D_{f'} =]0, +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_f = \mathbb{R}^{+*}$	\sqrt{x}	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$D_f = \mathbb{R}$	a
$D_{f'} = \mathbb{R}$	$-\sin x$	$D_f = \mathbb{R}$	$\cos x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$D_f = \mathbb{R}$	x
$D_{f'} = \mathbb{R}$	$\cos x$	$D_f = \mathbb{R}$	$\sin x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_f = \mathbb{R}$	x^n $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$
$\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ $c \neq 0$ و	$\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ $c \neq 0$ و	$\frac{ax+b}{cx+d}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_f = \mathbb{R}^*$	$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{1\}$
$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$1 + \tan^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\tan x$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$	$D_f = \mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x}$

IV. العمليات على الدوال المشتقة:

01. خاصيات: (الجدول 2)

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I .

شرط	مشتقتها	الدالة	شرط	مشتقتها	الدالة
g لا تنعدم على I	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	$\frac{f}{g}$		$(f+g)' = f' + g'$	$f+g$
$n \in \mathbb{N}^*$	$(f^n)'(x) = n \times (f(x))^{n-1} \times f'(x)$	f^n	$\alpha \in \mathbb{R}$	$(\alpha \times f)' = \alpha \times f'$	$\alpha \times f$
f و $n \in \mathbb{Z}^{-*}$ لا تنعدم على I	$(f^n)'(x) = n \times (f(x))^{n-1} \times f'(x)$	f^n		$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$	$f \times g$
g موجبة وقابلة للاشتقاق	$(\sqrt{g(x)})' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	$\sqrt{g(x)}$	g لا تنعدم على I	$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$	$\frac{1}{g}$

02. أمثلة: أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f في الحالات التالية

أ- $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 1$ ب- $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-1}$ ج- $f(x) = 2x \cos x$ د- $f(x) = 1 + (3x+2)^4$

V. الدالة المشتقة الثانية - المشتقات المتتالية (أو المتتابعة) لدالة f .

I. مفردات:

- المشتقة ل f' تسمى المشتقة الثانية ل f . نرسم لها ب: $(f'(x))' = f''(x) = f^{(2)}(x)$.
- إذا كانت $f^{(2)}$ بدورها قابلة للاشتقاق على I فدالتها المشتقة $(f^{(2)})'(x)$ تسمى المشتقة الثالثة ل f ونرسم لها ب $(f^{(2)})' = f^{(3)}$.

2. بصفة عامة :

المشتقة من الرتبة n للدالة f (أي $f^{(n)}(x)$) هي المشتقة لـ $f^{(n-1)}(x)$ (أي المشتقة من الرتبة $n-1$) $f^{(n-1)}(x)$ ونرمز لها بـ:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$$

3. مثال:

أحسب $f^{(3)}(x)$ حيث: أ - $f(x) = x^5$ - ب $f(x) = \frac{1}{x^2}$ - ج - بين أن: $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

VI. مشتقة مركب دالتين - مشتقة الدالة العكسية01. مشتقة مركب دالتين :(1) مبرهنة 1 :

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ فإن الدالة $g \circ f$ قابلة للاشتقاق في x_0 .
ولدينا: $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$.

(2) مبرهنة 2 :

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على I و $f(I)$ على التوالي
إذا كان x_0 عنصراً من I وكانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق في $f(I)$ فإن الدالة $g \circ f$ قابلة للاشتقاق على I .
ولدينا: $\forall x \in I: (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$.

(3) نتائج : (الجدول 3)

مجموعة تعريف f'	الدالة المشتقة $f'(x) =$	مجموعة تعريف f	الدالة $f(x) =$	مجموعة تعريف f'	الدالة المشتقة $f'(x) =$	مجموعة تعريف f	الدالة $f(x) =$
$D_{f'} = \mathbb{R}$	$-a \times \sin(ax+b)$	$D_f = \mathbb{R}$	$\cos(ax+b)$	$x \in D_g$, $g(x) > 0$	$\frac{g'(x)}{2 \times \sqrt{g(x)}}$	$x \in D_g$ $g(x) \geq 0$	$\sqrt{g(x)}$
$ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$a \times [1 + \tan^2(ax+b)]$	$ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\tan(ax+b)$	$D_{f'} = \mathbb{R}$	$a \times \cos(ax+b)$	$D_f = \mathbb{R}$	$\sin(ax+b)$

(4) مثال:

أحسب $f'(x)$ مع أ - $f(x) = \sqrt{x^2-x}$. جواب: $f'(x) = \left(\sqrt{x^2-x}\right)' = \frac{(x^2-x)'}{2\sqrt{x^2-x}} = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$

ب - $f(x) = \cos(2x-4)$. جواب: $f'(x) = (\cos(2x-4))' = (2x-4)' \cos'(2x-4) = -2x \sin(2x-4)$

02. مشتقة الدالة العكسية



(1) مبرهنة 1 :

لتكن f متصلة ورتبية قطعاً على I (لأن الدالة f تقابل من المجال I إلى المجال $J = f(I)$).
إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0) \neq 0$ فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق في $y_0 = f(x_0)$
لدينا: $(f^{-1})'(y_0) = (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$

(2) برهان :

بمأن f متصلة على I إذن دالتها العكسية f^{-1} متصلة على $J = f(I)$ و منه لكل y_0 من J لدينا $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$
ندرس اشتقاق f^{-1} في y_0 من J . نضع $f^{-1}(y) = x$ و $f^{-1}(y_0) = x_0$ مع x و x_0 من I . لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} \in \mathbb{R} ; (f'(x_0) \neq 0) \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} ; (f^{-1}(y_0) = x_0) \\ &= \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)} \end{aligned}$$

خلاصة : f^{-1} قابلة للاشتقاق في $y_0 = f(x_0)$ من $J = f(I)$ حيث: $(f^{-1})'(y_0) = (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$

(3) مبرهنة 2 :

لتكن f دالة تقابل من المجال I إلى المجال $J = f(I)$.
إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و دالتها المشتقة f' لا تنعدم على I (أي $\forall x \in I ; f'(x) \neq 0$) فإن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق
المجال $J = f(I)$. لدينا: $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$

(4) تطبيق 1 : مشتقة: $\sqrt[n]{x}$ و x^r و $g(x) = [f(x)]^r$. (الجدول 4)

$r \in \mathbb{Q}^*$ و $n \in \mathbb{N}^*$ و f موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على I

قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$.	$g'(x) = \left((x)^{\frac{1}{n}} \right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$	$g(x) = \sqrt[n]{x}$
	$g'(x) = (x^r)' = r x^{r-1}$	$g(x) = x^r$
قابلة للاشتقاق على I	$g'(x) = \frac{1}{n} \times f'(x) \times (f(x))^{\frac{1}{n}-1}$	$g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$
	$g'(x) = ([f(x)]^r)' = r \times f'(x) \times [f(x)]^{r-1}$	$g(x) = [f(x)]^r$



■ أمثلة: أحسب f' مع:

$$f(x) = \sqrt[5]{x^2+1} \quad f(x) = \sqrt[5]{x^2+1} \quad f(x) = \sqrt[5]{x}$$

جواب:

$$\left[f(x) = \sqrt[5]{x} \right]' = \left[x^{\frac{1}{5}} \right]' = \frac{1}{5} x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$$

$$\left[f(x) = \sqrt[5]{(x^2+1)} \right]' = \left[(x^2+1)^{\frac{1}{5}} \right]' = \frac{1}{5} (x^2+1)' (x^2+1)^{\frac{1}{5}-1} = \frac{14}{7} x (x^2+1)^{-\frac{4}{5}} = \frac{14}{7} x \sqrt[5]{(x^2+1)^4}$$

$$\left[f(x) = \sqrt[5]{(x^2+1)^7} \right]' = \left[(x^2+1)^{\frac{7}{5}} \right]' = \frac{7}{5} (x^2+1)' (x^2+1)^{\frac{7}{5}-1} = \frac{14}{7} x (x^2+1)^{\frac{2}{5}} = \frac{14}{7} x \sqrt[5]{(x^2+1)^2}$$

VII. تطبيقات الدالة المشتقة :

A. مطراف دالة عديدة قابلة للاشتقاق.

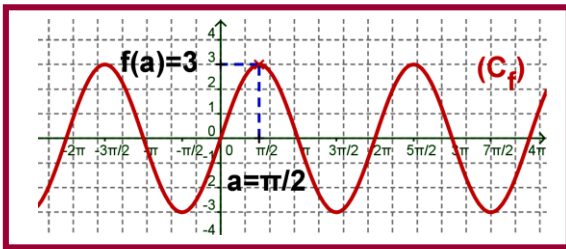
1. نشاط:

المنحنى الآتي يمثل دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I. ا عنصر من I.

(1) هل f تقبل مطراف في a ؟

(2) أعط قيمة ل f'(a). ثم أعط الخاصية.

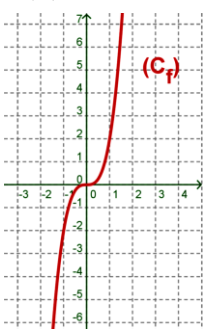
2. خاصية :



f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I. ا عنصر من I.

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في النقطة a و تقبل مطراف في النقطة a فإن $f'(a) = 0$.

الدالة $f(x) = 2x^3$



3. ملحوظة : إذا كان $f'(a) = 0$ فهذا لا يعني بالضرورة أن f مطراف للدالة f.

4. مثال :

$f(x) = 2x^3$ لدينا : $f'(x) = 6x^2$ ومنه : $f'(0) = 0$. ولكن f ليس مطراف ل f.

5. خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I. ا عنصر من I

إذا كانت f' تنعدم في النقطة a وتتغير إشارتها بجوار a فإن f مطراف ل f.

B. إشارة المشتقة الأولى ورتابة دالة :

1. خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

■ إذا كانت $f'(x) > 0 \forall x \in I$ فإن f تزايدية قطعاً على I. I (يمكن للدالة f' أن تنعدم في بعض النقط المنعزلة من I وهذا لا يؤثر على رتابة f)

■ إذا كان $f'(x) < 0 \forall x \in I$ فإن f تناقصية قطعاً على I. . (نفس الشيء يمكن للدالة f' أن تنعدم في بعض النقط المنعزلة من I)

■ إذا كان $f'(x) = 0 \forall x \in I$ (على I بكامله) فإن f ثابتة على I.

2. مثال :

• أدرس تغيرات f على \mathbb{R} مع $f(x) = (2x+4)^2$.



• هل الدالة f تقبل مطراف .

جواب :

• ندرس تغيرات الدالة f

(1) حساب f' :

لدينا:

$$\begin{aligned}f'(x) &= [(2x+6)^4]' \\ &= 4(2x+6)'(2x+6)^3 \\ &= 4 \times 2(2x+6)^3 \\ &= 8(2x+6)^3\end{aligned}$$

(2) إشارة f' :

إشارة f' هي إشارة $2x+6$

ومنه :

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x+6 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -3$$

إذن : f' موجبة على $[-3, +\infty[$ و سالبة على $]-\infty, -3]$ ومنه جدول تغيرات f .

(3) تغيرات الدالة f بواسطة الجدول التالي :

لدينا : $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} (2x+6)^4 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} (2x)^4 = +\infty$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f'	$+\infty$		$+\infty$
f		$f(-3) = 0$	

• مطاريف الدالة f :

من خلال جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن الدالة f تقبل قيمة دنبا في النقطة التي أفصولها $x_0 = -3$