مذكرة رقم5 في درس الدوال اللوغاريتمية

مذكرة رقم : 5
الأستاذ : عثماني نجيب

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
1. دالة اللوغاريتم النبيري - الرمز $\ln$؛ - صيغ: $\ln ab$ ؛ $\ln\frac{1}{b}$ ؛ $\ln\frac{a}{b}$ ؛ $\ln\sqrt{a}$ ؛ $\ln a^n \quad (n\in Z)$؛ - دراسة وتمثيل الدالة $x\to \ln x$؛	- التمكن من الحساب على اللوغاريتمات النبيرية والعشرية؛ - التمكن من حل معادلات ومتراجحات لوغاريتمية بسيطة؛ - استعمال الآلة الحاسبة لتحديد قيم مقربة للوغاريتم عدد حقيقي موجب قطعا أو تحديد قيمة مقربة لعدد لوغاريتمه معلوم؛	- دالة اللوغاريتم هي الدالة الأصلية للدالة $x\to\frac{1}{x}$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم في 1؛ - نقبل في هذا المستوى أن $\lim\limits_{+\infty}\ln x=+\infty$ وأن $\lim\limits_{0^+}\ln x=-\infty$ وتعتبران نهايتين أساسيتين؛ كما تقبل صيغة الدالة المشتقة لدالة اللوغاريتم النبيري.
2. اللوغاريتم العشري	- التمكن من نهايتي دالة اللوغاريتم النبيري عند محدات حيز تعريفه؛ - التمكن من دراسة وتمثيل دوال بسيطة تحتوي صيغها على دالة اللوغاريتم النبيري	

I. تعريف:

▪ توجد دالة تسمى دالة اللوغاريتم النبيري يرمز لها ب ln و هي دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ و لدينا: $(\forall x\in]0,+\infty[):ln'(x)=\frac{1}{x}$

▪ دالة اللوغاريتم النبيري تنعدم في 1 أي $ln(1)=0$.

II. خاصيات جبرية:

$$(\forall a\succ 0)(\forall b\succ 0)\ ln(ab)=ln(a)+ln(b) \qquad ln\left(\frac{1}{b}\right)=-ln(b) \qquad ln\left(\frac{a}{b}\right)=ln(a)-ln(b) \qquad ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}ln(a)$$

$$(\forall n\in\mathbb{Z})\,ln\left(a^n\right)=n\,ln(a)$$

مثال : إذا علمت أن $ln(2)\simeq 0,7$ و $ln(3)\simeq 1,1$ فاحسب ما يلي: $ln(6)$ $\quad ln(4)$ $\quad ln(8)$ $\quad ln(72)$ $\quad ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$ln\left(\frac{3}{2}\right)$ $\quad ln\left(\sqrt{2}\right)$ $\quad ln\left(\sqrt{6}\right)$ $\quad ln\left(3\sqrt{2}\right)$

الحل $ln(6)=ln(2\times 3)=ln(2)+ln(3)\simeq 0,7+1,1\simeq 1,8$

$ln(4)=ln(2\times 2)=ln\left(2^2\right)=2ln(2)\simeq 2\times 0,7\simeq 1,4$

$ln(8)=ln(2\times 2\times 2)=ln\left(2^3\right)=3ln(2)\simeq 3\times 0,7\simeq 2,1$

$\ln(72)=\ln(9\times 8)=\ln(9)+\ln(8)=\ln\left(3^2\right)+\ln\left(2^3\right)$ $\qquad ln\left(\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}ln(2)\simeq\frac{1}{2}\times 0,7\simeq 0,35$

$ln(72)=ln\left(3^2\times 2^3\right)=ln\left(3^2\right)+ln\left(2^3\right)=2ln(3)+3ln(2)$

$ln(72)\simeq 2\times 1,1+3\times 0,7\simeq 2,2+2,1\simeq 4,3$ و $ln\left(\frac{3}{2}\right)=ln(3)-ln(2)\simeq 1,1-0,7\simeq 0,4$ $\qquad ln\left(\frac{1}{2}\right)=-ln(2)\simeq -0,7$

$ln\left(\sqrt{6}\right)=\frac{1}{2}ln(6)\simeq\frac{1}{2}\times 1,8\simeq 0,9$ $\qquad \ln\left(3\sqrt{2}\right)=\ln(3)+\ln\left(\sqrt{2}\right)\simeq 1,1+\frac{1}{2}\ln(2)\simeq 1,1+\frac{0,7}{2}\simeq 1,1+0,35\simeq 1,45$

تمرين1:1) إذا علمت أن $\ln(2)\simeq 0,7$ و $\ln(5)\simeq 1,6$ فاحسب ما يلي: $ln(10)$ $\quad ln(25)$ $\quad ln(16)$ $\quad ln(125)$ $\quad ln\left(\frac{1}{5}\right)$

$ln\left(\frac{2}{5}\right)$ $\quad ln\left(\sqrt{5}\right)$ $\quad ln\left(2\sqrt{5}\right)$

2) تحقق أن : $2\ln 4+\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\ln(8)=0$

الحل:1) $ln(10)=ln(2\times 5)=ln(2)+ln(5)$

$\simeq 0,7+1,6\simeq 2,3$

$ln(25)=ln(5\times 5)=ln\left(5^2\right)\simeq 2ln(5)\simeq 2\times 1,6\simeq 3,2$

$ln(16)=ln(2\times 2\times 2\times 2)=ln\left(2^4\right)=4ln(2)\simeq 4\times 0,7\simeq 2,8$

$ln(125)=ln(5\times 5\times 5)=ln\left(5^3\right)=3ln(5)\simeq 4\times 1,6\simeq 6,4$

$ln\left(\frac{1}{5}\right)=-ln(5)\simeq -1,6$ $\qquad ln\left(\frac{2}{5}\right)=ln(2)-ln(5)\simeq 0,7-1,6\simeq -0,9$

$\ln\left(\sqrt{5}\right)=\frac{1}{2}\ln(5)\simeq\frac{1}{2}\times 1,6\simeq 0,8$ $=0,7+\frac{1}{2}(1,6)$ $\ln\left(2\sqrt{5}\right)=\ln(2)+\ln\left(\sqrt{5}\right)=\ln(2)+\frac{1}{2}\ln(5)=0,7+0,8=1,5$

(2 $2\ln 4+\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\ln(8)=0$????

$$2\ln 4+\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\ln(8)=2\ln 2^2-\ln(2)-\ln\left(2^3\right)$$

$$=2\times 2\ln 2-\ln(2)-3\ln(2)=4\ln 2-\ln(2)-3\ln(2)=0$$

تمرين2: بسط

1. $A=\ln(3)-\ln(5)+\ln(15)$
2. $B=\ln(0,01)-\ln(1000)+\ln\left(10^6\right)$

الجواب: (1 $A=\ln(3)-\ln(5)+\ln(15)=\ln(3)-\ln(5)+\ln(3\times 5)$

$$A=\ln(3)-\ln(5)+\ln 3+\ln 5=2\ln(3)=\ln\left(3^2\right)=\ln(9)$$

$$B=\ln\left(10^{-2}\right)-\ln\left(10^3\right)+\ln\left(10^6\right)=-2\ln(10)-3\ln(10)+6\ln(10)$$

$$B=\ln(10)=\ln(2\times 5)=\ln 2+\ln 5$$

تمرين3: إذا علمت أن $\ln(2)\simeq 0,7$ و $\ln(11)\simeq 2,4$ فاحسب ما يلي:

$\ln(22)$ $\ln(121)$ $\ln(32)$ $\ln(44)$ $\ln\left(\frac{11}{2}\right)$

الحل $\ln(22)=\ln(2\times 11)=\ln(2)+\ln(11)\simeq 0,7+2,4\simeq 3,1$

$$\ln(121)=\ln(11\times 11)=\ln\left(11^2\right)=2\ln(11)\simeq 2\times 2,4\simeq 4,8$$

$$\ln(32)=\ln(2\times 2\times 2\times 2\times 2)=\ln\left(2^5\right)=5\ln(2)\simeq 5\times 0,7\simeq 3,5$$

$$=\ln\left(3^2\right)+\ln\left(2^3\right)$$

$$\ln(44)=\ln(4\times 11)=\ln(4)+\ln(11)=2\ln(2)+\ln(11)$$

$$\ln(44)\simeq 2\times 0,7+2,4\simeq 1,4+2,4\simeq 3,8$$

$$\ln\left(\frac{11}{2}\right)=\ln(11)-\ln(2)\simeq 2,4-0,7\simeq 1,7$$

III. النهايات:

تقبل النهايات التالية:

الخاصية 1: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ **الخاصية 2:** $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$

مثال : أحسب النهايات التالية : (1 $\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln(x)+1$ (2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)+1}{\ln x}$ (3 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}$

الجواب: (1 $\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln(x)+1=2\times(+\infty)+1=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)+1}{\ln x}=\frac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$

(2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x\left(2+\frac{1}{\ln x}\right)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2+\frac{1}{\ln x}=2+0=2$

(3 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{-\infty}=0^-$ لأن : $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$

IV. جدول تغيرات الدالة $x\to\ln(x)$:

لدينا: $(\forall x\in]0,+\infty[):\ln'(x)=\frac{1}{x}$

بما أن $x>0$ فان $(\forall x\in]0,+\infty[):\ln'(x)=\frac{1}{x}>0$

و بالتالي الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

و منه الجدول:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$\ln(a)=\ln(b)\Leftrightarrow a=b\ (\forall a>0)(\forall b>0)$ و $\ln(a)>\ln(b)\Leftrightarrow a>b\ (\forall a\succ 0)(\forall b\succ 0)$ لأن الدالة $\ln$ تزايدية قطعا.

العدد e : $e \simeq 2,71828\cdots$ و e هو العدد الحقيقي الذي يحقق $\ln(e)=1$.

ولدينا: $(\forall n\in\mathbb{Z})\,\ln(e^n)=n\ln(e)=n$

أمثلة: 1) $\ln(e^3)=3$ و $7=\ln(e^7)$

2) حل المعادلة $\ln(x)=7$ يعني $x=e^7$

تمرين 4: أحسب وبسط :

$A=\ln(e^2)+\ln(e^4)-\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ $\quad B=2\ln(\sqrt{e})+\ln(e\sqrt{e})-\frac{1}{3}\ln(e^9)$

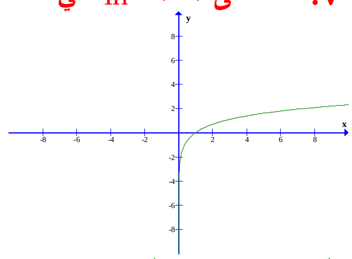
الجواب: 1) $A=\ln(e^2)+\ln(e^4)-\ln\left(\frac{1}{e}\right)=2\ln(e)+4\ln(e)--\ln(e)$

$A=2\times1+4\times1--1=7$

$B=2\ln(\sqrt{e})+\ln(e\sqrt{e})-\frac{1}{3}\ln(e^9)=2\times\frac{1}{2}\ln(e)+\ln e+\ln(\sqrt{e})-\frac{1}{3}9\ln(e)$

$B=1\ln(e)+\ln e+\frac{1}{2}\ln(e)-3\ln(e)=1+1+\frac{1}{2}-3=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

V. منحنى الدالة $\ln$ في معلم متعامد ممنظم



تطبيق خاصيات اللوغاريتم النيبري: المعادلات:

مثال : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $\ln(x)=0$ 2) $\ln(x)=1$ 3) $\ln(x)=7$ 4) $\ln(x+1)=\ln(3)$ 5) $\ln(x)(\ln(x)-1)=0$ 6) $(\ln x+1)(\ln x-1)=0$

الحل: الكتابة $\ln(x)$ لها معنى إذا كان $x>0$.

1) يجب أن يكون $x\succ 0$ في المعادلة $\ln(x)=0$

و منه مجموعة تعريف هذه المعادلة هي $]0,+\infty[$

المعادلة $\ln(x)=0$ تكافئ $\ln(x)=\ln(1)$ و منه $x=1$ و بما أن $1\in]0,+\infty[$

فان مجموعة حلول المعادلة هي: $S=\{1\}$

2) مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x)=1$ هي $]0,+\infty[$

و هي تكافئ $\ln(x)=\ln(e)$ أي $x=e$ و بما أن $e\in]0,+\infty[$ فان $S=\{e\}$

3) مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x)=7$ هي $]0,+\infty[$

و هي تكافئ $\ln(x)=\ln(e^7)$ أي $x=e^7$ و بما أن $e^7\in]0,+\infty[$ فان $S=\{e^7\}$.

4) يجب أن يكون $x+1>0$ أي $x>-1$

و منه مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x+1)=\ln(3)$ هي $]-1,+\infty[$

المعادلة تكافئ $x+1=3$ أي $x=2$ و بما أن $2\in]-1,+\infty[$ فان $S=\{2\}$

5) مجموعة تعريف المعادلة هي $]0,+\infty[$

$\ln(x)(\ln(x)-1)=0\Leftrightarrow \ln(x)-1=0$ أو $\ln(x)=0$

يعني $\ln(x)=1$ أو $\ln(x)=0$ يعني $\ln(x)=\ln(e)$ أو $\ln(x)=\ln(1)$ يعني $x=e$ أو $x=1$ ومنه فان $S=\{1,e\}$

6) مجموعة تعريف المعادلة هي $]0,+\infty[$

$(\ln x+1)(\ln x-1)=0\Leftrightarrow \ln x-1=0$ أو $\ln x+1=0$ يعني $\ln(x)=1$ أو $\ln x=-1$ يعني $\ln(x)=\ln(e)$ أو $\ln(x)=-\ln(e)$

يعني $x=e$ أو $\ln(x)=\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ يعني $x=e$ أو $x=\frac{1}{e}$ ومنه فان $S=\left\{\frac{1}{e},e\right\}$

تطبيق خاصيات اللوغاريتم النيبري:

دراسة دالة تحتوي صيغتها على اللوغاريتم النيبري:

مثال1: نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=\ln x+1$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f

2. أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(e^2)$ و $f\left(\frac{1}{e}\right)$

3. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$
و ادرس اشارة المشتقة

4. أحسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

5. أعط جدول تغيرات الدالة f.

الحل:

1. مجموعة تعريف الدالة f هي $]0,+\infty[$

2. $f(1)=\ln(1)+1=1$
$f(e)=\ln(e)+1=1+1=2$
$f(e^2)=\ln e^2+1=2\ln e+1=2\times 1+1=3$
$f\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\left(\frac{1}{e}\right)+1=-\ln e+1=-1+1=0$

3. حساب $f'(x)$:
$$f'(x)=\left(\ln(x)+1\right)' =\left(\ln(x)\right)'+(1)'=\frac{1}{x}>0$$
لأن x موجب قطعا.

4. حساب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$:
لدينا $\lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$ اذن $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.
حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:لدينا $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ اذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

5. ومنه جدول تغيرات f هو كما يلي:

x	0 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

مثال2 : نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x)=2\ln x-x$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f
2. أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(e^2)$
3. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$
4. ادرس اشارة مشتقة الدالة
5. أحسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

الحل:

1. مجموعة تعريف الدالة f هي $]0,+\infty[$

2. $f(1)=2\ln(1)-1=0-1=-1$
$f(e)=2\ln(e)-e=2-e$
$f(e^2)=2\ln e^2-e^2=4\ln e-e^2=4\times 1-e^2=4-e^2$

3. حساب $f'(x)$:
$$f'(x)=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}$$

4. اشارة $f'(x)$ هي اشارة $(2-x)$ لأن x موجب قطعا.

5. لدينا $\lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to 0^+} x=0$ اذن $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

تمرين5: نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x)=\ln x+x$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f
2. أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(e^2)$
3. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$

4. أحسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

أجوبة :1)مجموعة تعريف الدالة f هي $]0,+\infty[$

2) $f(1)=\ln(1)+1=0+1=1$ و $f(e)=\ln(e)+e=1+e$

$f(e^2)=\ln e^2+e^2=2\ln e+e^2=2\times1+e^2=2+e^2$

3)حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{1}{x}+1=\frac{1+x}{x}$$

4) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln x+x=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln x+x=+\infty$

VI.اللوغاريتم العشري :

تعريف:يرمز لدالة اللوغاريتم العشري ب: log و هي معرفة على $]0,+\infty[$

كما يلي: $(\forall x\in]0,+\infty[):\log(x)\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

ويحقق $\log(10)=1$

مثال: علما أن $\log(2)\simeq 0,3$ أحسب $\log(20)$

$$\log(20)=\log(2\times10)=\log(2)+\log(10)$$
$$\simeq 0,3+1\simeq 1,3$$

خاصيات هامة لدالة اللوغاريتم العشري:

1. $\log(1)=0$ و $\log(10)=1$
2. $(\forall a\succ0)(\forall b\succ0):\log(a\times b)=\log(a)+\log(b)$
3. $(\forall a\succ0):\log\left(\frac{1}{b}\right)=-\log(b)$
4. $(\forall a\succ0)(\forall b\succ0):\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$
5. $(\forall a\succ0)(\forall n\in\mathbb{Z}):\log(a^n)=n\log(a)$
6. $(\forall n\in\mathbb{Z}):\log(10^n)=n$
7. $(\forall a\succ0)(\forall b\succ0):\log(a)=\log(b)\Leftrightarrow a=b$
8. $(\forall a\succ0)(\forall b\succ0):\log(a)\succ\log(b)\Leftrightarrow a\succ b$

تمرين6:بسط و أحسب :

$A=\log(0,01)-\log(1000)+\log(10^6)$

$B=\log(10)+2\log(100)+\log(10^4)$

$C=\log(4)+\log(25)$

$D=1+2\log2-\log(40)$

$E=\log(900)+2\log\left(\frac{1}{3}\right)-2$

الجواب: $A=\log(10^{-2})-\log(10^3)+\log(10^6)$

$A=-2\log(10)-3\log(10)+6\log(10)$

$A=-2-3+6=1$

$B=\log(10)+2\log(100)+\log(10^4)$

$B=1+2\log(10^2)+\log(10^4)=1+2\times2+4\log(10)=1+4+4$ ومنه $B=9$

$C=\log(4)+\log(25)=\log(4\times25)=\log(100)$

$C=\log(10^2)=2\log(10)=2\times1=2$

$D=1+2\log2-\log(40)=1+\log2^2-(\log(4\times10))$

$D=1+l\,og\,2^2-(l\,og\,4+l\,og10)=1+l\,og\,4-l\,og\,4-l\,og10$

$D=1+l\,og\,4-l\,og\,4-1=0$

$E=\log(900)+2\log\left(\frac{1}{3}\right)-2=\log(9\times100)-2\log(3)-2$

$E=\log9+\log100-2\log(3)-2$

$E=\log3^2+\log10^2-2\log(3)-2=2\log3+2\log10-2\log(3)-2$ ومنه $E=2\log10-2=2\times1-2=0$

تمرين7: علما أن $\log(3) \simeq 0,47$ و $\log(5) \simeq 0,7$

أحسب $\log(15)$ و $\log(\sqrt{5})$ و $\log\left(\frac{1}{3}\right)$ و $\log(50)$ و $\log(300)$

أجوبة :
$$\log(15) = \log(5\times3) = \log(5) + \log(3) \simeq 0,7 + 0,47 \simeq 1,17$$

$$\log(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\log(5) \simeq \frac{1}{2}\times 0,7 \simeq 0,35$$

$$\log\left(\frac{1}{3}\right) = -\log(3) \simeq -0,47$$

$$\log(50) = \log(5\times10) = \log(5) + \log(10) \simeq 0,7 + 1 \simeq 1,7$$

$$\log(300) = \log(3\times100) = \log(3) + \log(100) \simeq 0,47 + 2 \simeq 2,47$$