الثانوية الجاحظ التأهيلية **نيابة زاكورة - تمزموط**	**فرض محروس رقم 1** **الدورة الاولى** **في مادة الرياضيات**	**السنة الدراسية : 2012/13**
المستوى: 2 باك علوم تجريبية 1		**المدة: ساعتان** **استاذ: عبد الفتاح قويدر**

التنقيط

تمرين I: (7ن)

1- بين ان $x^3+x+1=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-2;0]$ (1ن)

2- احسب النهايات التالية : (5ن)

1) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3-x}+3x$

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x}$

3) $\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt[3]{2x-1}$

4) $\lim_{x\to5}\frac{\sqrt[3]{x+22}-3}{2x-10}$

5) $\lim_{x\to1}\sqrt[3]{x}-1$

3- حل المتراجحة التالية: $\sqrt[5]{2x-1}\geq 2$ (1ن)

تمرين II: (9ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي : $f(x)=\sqrt[3]{x+1}-1$

1- حدد D_f ثم ادرس اتصال الدالة f على D_f (1ن)

2- احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ (1ن)

3- ادرس قابلية اشتقاقf قي 0 ثم اول نتيجة هندسيا (1.5ن)

4- احسب $f'(x)$; $\forall x\in D_f$ (1ن)

5- ضع جدول تغيرات الدالة f (1ن)

6- بين ان f تقبل دالة عكسية على $I=D_f$ نحو مجال J تم تحديده (1ن)

7- احسب $f(1)$ ثم بين ان f^{-1} قابلة للاشتقاق في $f(1)$ وحدد $(f^{-1})'(f(1))$ (1ن)

8- حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J (1.5ن)

تمرين III (*): (4ن)

لتكن f دالة عددية متصلة على مجال $[a;b]$

ولتكن x_1 و x_2 و ... و x_n اعداد حقيقية من المجال $[a;b]$

ولتكن $f([a;b])=[m;M]$

نضع $\sum_{i=1}^{n}f(x_i)=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_3)$

1- بين ان $m\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\leq M$ (2ن)

2- استنتج ان $\exists c\in[a;b]\ ;\ f(c)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$ (2ن)

والله ولي التوفيق

www.maths-lycee.webnode.fr

الثانوية الجاحظ التاهيلية	تصحيح : فرض محروس رقم 1 الدورة الاولى في مادة الرياضيات	السنة الدراسية : 2012/2013
المستوى : الثانية باك علوم تجريبية		استاذ : عبدالفتاح قويدر

تصحيح تمرين 1 :

-1 لنبين ان:0 $x^3+x+1=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-2;0]$

لدينا $x\to x^3+x+1$ متصلة على $\mathbb{R}$ وبالتحديد على مجال $[-2;0]$ (لانها دالة حدودية)

وكذلك الدالة $x\to x^3+x+1$ **قابلة الاشتقاق على** $\mathbb{R}$ وبالتحديد على مجال $[-2;0]$ (لانها دالة حدودية)

وبالتالي : $f'(x)=(x^3+x+1)'=3x^2+1\geq 0$

(لان $x^2\geq 0$)

وبالتالي f دالة تزايدية على $[-2;0]$

-لنحسب $f(0)\times f(-2)$:

$f(0)=0^3+0+1=1$

و $f(-2)=(-2)^3-2+1=-9$

وبالتالي : $f(0)\times f(-2=1\times -9=-9<0$

ومنه فإن المعادلة $f(x)=x^3+x+1=0$ تقبل حل وحيد في المجال$[-2;0]$

-2 لنحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3-x}+3x$

$$=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}+3x$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}+3\right)=-\infty$$

(لان $\lim_{x\to-\infty}1-\frac{1}{x^2}=1$)

2) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}}{x}$$

$=\lim_{x\to+\infty}1-\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=1$ (لان $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=0$)

3) $$\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt[3]{2x-1}=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\sqrt[3]{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}\right)=+\infty$$

(لان $\lim_{+\infty}\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}=0$)

4) $$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt[3]{x+22}-3}{2x-10}=\lim_{5}\frac{x+22-27}{2(x-5)(\sqrt[3]{x+22}+3\sqrt[3]{x+22}+3^2)}=\frac{1}{54}$$

5) $\lim_{x\to1}\sqrt[3]{x}-1=0$

-3 لنحل المتراجحة التالية : $\sqrt[5]{2x-1}\geq 2$

$\sqrt[5]{2x-1}\geq 2\iff 2x-1\geq 32\iff x\geq\frac{33}{2}$ وبالتالي $S=\left[\frac{33}{2};+\infty\right[$

التمرين الثاني :

$f(x)=\sqrt[3]{x+1}-1$

-1 $x\in D_f\iff x+1\geq 0$ وبالتالي $D_f=[-1;+\infty[$

-الدالة $x\mapsto -1$ متصلة على$\mathbb{R}$ وبالخصوص على $[-1;+\infty[$(لانها دالة حدودية)

-الدالة $x\mapsto\sqrt[3]{x+1}$متصلة على $[-1;+\infty[$

وبالتالي f متصلة على$[-1;+\infty[$ (عبارة عن مجموع دالتين متصلتين)

-2 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x+1}-1=+\infty$

(لان $\lim_{+\infty}\sqrt[3]{x+1}=+\infty$)

-3 لندرس قابلية الاشتقاق f في 0 : $f(0)=0$

$$\lim_{0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$$

$$=\lim_{0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}=\frac{1}{3}\in\mathbb{R}$$

وبالتالي f قابلة الاشتقاق في 0 ومنه فإن (C_f) يقبل مماسا معادلته :

$$(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)=\frac{1}{3}x$$

-4 لنحسب $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

وبالتالي $\forall x\in]-1;+\infty[;f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

-5 جدول تغيرات الدالة f:

لدينا $\forall x\in]-1;+\infty[;\ f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}>0$

ومنه فإن f تزايدية قطعا على $]-1;+\infty[$

-جدول تغيرات الدالة f:

x	-1 $+\infty$
$f'(x)$	‖ +
$f(x)$	$\nearrow$

-6 لدينا f متصلة وتزايدية قطعا على $]-1;+\infty[$

ومنه فإن f تقبل دالة عكسية من $]-1;+\infty[$ نحو المجال J

تحديد J : $J=f([-1;+\infty[)=[f(-1);\lim_{+\infty}f(x)[$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $f(-1)=-1$

وبالتالي فأن : $J=[-1;+\infty[$

-7 لنحسب $f(1)$: $f(1)=\sqrt[3]{2}-1$

لنحسب f'(1): $f'(1)=\frac{1}{\sqrt[3]{(1+1)^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$

بماان f قابلة الاشتقاق في 1 و $f'(1)\neq 0$ ، وبالتالي f^{-1} قابلة الاشتقاق في $f(1)$

وبالتالي $(f^{-1})'(f(1))=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}}=3\sqrt[3]{4}$

-8 لنحدد $f^{-1}(x)$:

ليكن x و y عنصرين من المجال $[-1;+\infty[$

$f^{-1}(x)=y\iff f(y)=x\iff\sqrt[3]{y+1}-1=x$

$\iff y+1=(x+1)^3\iff y=(x+1)^3-1$

وبالتالي $\forall x\in[-1;+\infty[;f^{-1}(x)=(x+1)^3-1$

التمرين 3 :

-1 لدينا x_1 و x_2 و ... و x_nاعداد حقيقية من المجال $[a;b]$ و $f([a;b])=[m;M]$

فإن $m\leq f(x_i)\leq M$ لكل i من $\{1.2;\dots;n\}$

$$\underbrace{\boldsymbol{m}+\dots+\boldsymbol{m}}_{\text{n مرة}}=\boldsymbol{nm}\leq\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f(x_i)}\leq\underbrace{\boldsymbol{M}+\dots+\boldsymbol{M}}_{\text{n مرة}}=\boldsymbol{nM}$$

ومنه $\boldsymbol{m}\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f(x_i)}\leq\boldsymbol{M}$

-2 نضع ان : $g(x)=f(x)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f(x_i)}$

بماأن f متصلة على المجال $[a;b]$ فإن g متصلةعلى $[a;b]$ (عبارة عن مجموع دالتين متصلتين)

لنبين ان $g(a) \times g(b) < 0$:

لنحسب $g(a)$:

$g(a) = f(a) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f(x_i)} = \boldsymbol{m} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f(x_i)} < \mathbf{0}$

لان $\boldsymbol{m} < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f(x_i)}$ **حسب سؤال(1)**

لنحسب $g(b)$:

$g(b) = f(b) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f(x_i)} = \boldsymbol{M} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f(x_i)} > \mathbf{0}$

لان $\boldsymbol{m} > \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f(x_i)}$ **حسب سؤال(1)**

ومنه $g(a) \times g(b) < 0$

وبالتالي حسب مبرهنة القيم الوسطية فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل على الاقل حل c في $[a; b]$

اذن $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f(x_i)} = 0$

ومنه نستنتج ان $\exists c \in [a; b] ; f(c) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$