

Durée : 02h30

• التمرين رقم 01: (02 pts)

1- أكتب نفي العبارة : $p : ((\forall x \in \mathbb{R}), x^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q})$.

2- باستعمال الاستدلال بالمثل المضاد ، بين أن العبارة p خاطئة .

• التمرين رقم 02: (02 pts)

← حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $(E) : 2\sqrt{x-1} + 4\sqrt{y-4} = x + y$.

• التمرين رقم 03: (02 pts)

تكن n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $P(n) = n^2 + 7n + 12$.

1- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}), (n+3)^2 < P(n) < (n+4)^2$.

2- باستعمال الاستدلال بالخلف ، بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}), \sqrt{P(n)} \notin \mathbb{N}$.

• التمرين رقم 04: (02 pts)

← بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}), x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4} > 0$.

(يمكنك الاستدلال بفصل الحالات ، ودراسة حالة : $x \leq 0$ و $x \geq 1$ و $0 < x < 1$) .

• التمرين رقم 05: (03 pts)

تكن a و b و c و d أعدادا حقيقية موجبة قطعاً و مختلفة فيما بينها مثلي مثلي .

← بين أن : $ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ، ثم استنتج أن : $abcd < \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$.

• التمرين رقم 06: (03 pts)

1- بين أن : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (1 < x + y \leq \sqrt{2})$.

2- استنتج أن : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{-*})^2, x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (-\sqrt{2} \leq x + y < -1)$.

• التمرين رقم 07: (03 pts)

تكن n من $\mathbb{N}^*$.

1- بين أنه إذا كان n فردياً ، فإن $n = 4k + r$ حيث $k \in \mathbb{N}$ و $r \in \{1; 3\}$.

2- باستعمال الاستدلال بمضاد العكس ، بين أن : $(n \text{ عدد زوجي}) \Rightarrow (n^2 - 1 \text{ لا يقبل القسمة على } 8)$.

• التمرين رقم 08: (03 pts)

1- بين بالترجع أنه لكل n من $\mathbb{N}$ ، $n(n^2 + 5)$ يقبل القسمة على 6 .

2- بين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \sum_{k=1}^n k \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4 \times 5^{n+1} - (5+n)4^{n+1}}{5^n}$.

الأولى بالك علوم رياضية ن : عبدالله بن لختير	تصحيح فرض محروس رقم 01 الدورة الأولى : 2010/2009	منارة الفردوس نيابة الحميسات
---	---	---------------------------------

• التمرين رقم 01:

(1)- إذا كانت s و t عبارتين ، فإب : $(s \Rightarrow t) \Leftrightarrow (s \text{ و } \neg t)$.

إبب نفي العبارة : $((\forall x \in \mathbb{R}), x^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q})$: هي العبارة :

$$\neg p : ((\exists x \in \mathbb{R}) / x^2 \in \mathbb{Q} \text{ و } x \notin \mathbb{Q})$$

(2)- نبين أن $\neg p$ عبارة صحيحة .

نأخذ $x = \sqrt{2}$ لدينا : $x^2 = 2 \in \mathbb{Q}$ و نعلم أن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ، إبب $\neg p$ عبارة صحيحة .

و بالتالي فإب p عبارة خاطئة .

• التمرين رقم 02: (02 pts)

← تكون المعادلة (E) معرفة إذا كان $x \in [1; +\infty[$ و $y \in [4; +\infty[$.

و في هذه الحالة ، لدينا :

$$(E) \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x-1} + y - 4\sqrt{y-4} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1 + y - 4 - 4\sqrt{y-4} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1})^2 - 2\sqrt{x-1} + 1^2 + (\sqrt{y-4})^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{y-4} + 2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 1)^2 + (\sqrt{y-4} - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} - 1 = 0 \\ \sqrt{y-4} - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases}$$

و بالتالي ، فإب : $S = \{(2;8)\}$.

• التمرين رقم 03:

نكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $P(n) = n^2 + 7n + 12$.

(1)- نكل n من $\mathbb{N}$ ، لدينا :

$$(n+4)^2 - P(n) = (n^2 + 8n + 16) - (n^2 + 7n + 12)$$

$$= n + 4 \geq 4$$

$$P(n) - (n+3)^2 = (n^2 + 7n + 12) - (n^2 + 6n + 9)$$

$$= n + 3 \geq 3$$

← إبب : $(\forall n \in \mathbb{N}), (n+4)^2 > P(n)$ و $(\forall n \in \mathbb{N}); P(n) > (n+3)^2$

و بالتالي ، فإب : $(\forall n \in \mathbb{N}), (n+3)^2 < P(n) < (n+4)^2$.

2- نبين بالخطأ أن : $(\forall n \in \mathbb{N}), \sqrt{P(n)} \notin \mathbb{N}$.

← نفترض أنه : $(\exists n \in \mathbb{N}), \sqrt{P(n)} \in \mathbb{N}$

إذن : $(\exists a \in \mathbb{N}) / \sqrt{P(n)} = a$ ، بمعنى أنه : $(\exists a \in \mathbb{N}) / P(n) = a^2$

و باستعمال نتيجة السؤال 1- نستنتج أنه : $(\exists a \in \mathbb{N}) / (n+3)^2 < a^2 < (n+4)^2$.

و هذا تناقض ، لأنه لا يوجد مربع كامل بين المربعين المتتابعين $(n+3)^2$ و $(n+4)^2$. إذن إفتراضنا خاطئ

و بالتالي فإن : $(\forall n \in \mathbb{N}), \sqrt{P(n)} \notin \mathbb{N}$.

• التمرين رقم 04:

← نبين بفصل الحالات : $x \leq 0$ و $x \geq 1$ و $0 < x < 1$ أن :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4} > 0$$

نكل x من $\mathbb{R}$ ، نضع : $P(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4}$.

← في حالة $x \leq 0$ ، لدينا :

$$x^6 + x^4 + x^2 \geq 0 \text{ و } -(x^5 + x^3 + x) \geq 0 \text{ (لأن : } x^5 + x^3 + x \leq 0 \text{)}$$

$$\text{إذن : } x^6 + x^4 + x^2 - (x^5 + x^3 + x) \geq 0$$

$$\text{و منه فإن : } (\forall x \in \mathbb{R}^-), P(x) \geq \frac{3}{4}$$

← في حالة $x \geq 1$ ، لدينا :

$$x^6 - x^5 = x^5(x-1) \geq 0 \text{ و } x^4 - x^3 = x^3(x-1) \geq 0 \text{ و } x^2 - x = x(x-1) \geq 0$$

$$\text{إذن : } (\forall x \in [1; +\infty[), P(x) \geq \frac{3}{4}$$

← و في حالة $0 < x < 1$ ، لدينا :

$$P(x) = \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \left(x^6 - x^3 + \frac{1}{4}\right) + (x^4 - x^5) + \frac{1}{4}$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 + x^4(1-x) + \frac{1}{4}$$

$$\text{و بما أن : } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ و } \left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ و } x^4(1-x) > 0 \text{ ، فإن : } (\forall x \in]0;1[), P(x) > \frac{1}{4}$$

$$\text{إذن : } (\forall x \in \mathbb{R}), P(x) > \frac{1}{4} \text{ ، و بالتالي فإن : } (\forall x \in \mathbb{R}), P(x) > 0$$

• التمرين رقم 05:

← نكل a و b من $\mathbb{R}^+$ ، لدينا :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{4} = \frac{(a-b)^2}{4}$$

$$\text{و بما أن } a \neq b \text{ ، فإن : } (a-b)^2 > 0 \text{ . إذن : } ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

← استنتاج :

إذا كانت a و b و c و d أعدادا حقيقية موجبة قطعاً و مختلفة فيما بينها مثني مثني ، فإن :

$$ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ و } cd < \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 .$$

و بضرب طرفي المتفاوتتين السابقتين ، نحصل على : $abcd < \frac{[(a+b) \times (c+d)]^2}{4}$.

$$(a+b) \times (c+d) \leq \left(\frac{(a+b) + (c+d)}{2}\right)^2 \text{ و بما أن :}$$

$$abcd < \frac{[(a+b) \times (c+d)]^2}{4} \leq \frac{1}{4^2} \left(\frac{(a+b) + (c+d)}{2}\right)^4 \text{ : فإن}$$

و بذلك يتحقق المطلوب .

• التمرين رقم 06:

(1)- نكن x و y من $\mathbb{R}^{*+}$ بحيث $x^2 + y^2 = 1$ ، لدينا :

$$(x+y)^2 - 2 = (x+y)^2 - 2(x^2 + y^2) = -(x-y)^2 \leq 0$$

$$\text{إذن : } (x+y)^2 \leq 2 \text{ ، بمعنى أن : } x+y \leq \sqrt{2} .$$

← و من جهة أخرى :

$$\text{لدينا : } 0 < x < 1 \Rightarrow (x^2 < x^2 + y^2 = 1) \text{ و } 0 < y < 1 \Rightarrow (y^2 < x^2 + y^2 = 1)$$

$$\text{و بما أن : } (x+y) - 1 = (x+y) - (x^2 + y^2) = x(1-x) + y(1-y)$$

$$\text{فإن : } (x+y) - 1 > 0 .$$

$$\text{إذن : } \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{*+})^2 ; x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (1 < x+y \leq \sqrt{2})$$

(2)- ليكن x و y من $\mathbb{R}^{*-}$ بحيث $x^2 + y^2 = 1$.

$$\text{بما أن : } -x \in \mathbb{R}^{*+} \text{ و } -y \in \mathbb{R}^{*+} \text{ و } (-x)^2 + (-y)^2 = x^2 + y^2 = 1$$

$$\text{فإن : } 1 < (-x) + (-y) \leq \sqrt{2}$$

$$\text{إذن : } -\sqrt{2} \leq x+y < -1 .$$

• التمرين رقم 07:

(1)- ليكن n من $\mathbb{N}^*$ و n عدد فردي .

$$\text{نعلم أنه يوجد } k \in \mathbb{N} \text{ و } r \in \{0;1;2;3\} \text{ بحيث : } n = 4k + r .$$

و بما أن n فردي فإن $r \notin \{0;2\}$ (إذ لو كان $r \in \{0;2\}$ لكان n زوجياً و هذا غير ممكن)

$$\text{إذن : } n = 4k + r \text{ حيث } k \in \mathbb{N} \text{ و } r \in \{1;3\} .$$

(2)- للبرهان بمضاد العكس على أن :

$$(n \text{ عدد زوجي}) \Rightarrow (n^2 - 1 \text{ لا يقبل القسمة على } 8)$$

$$\text{نبين أن : } (n^2 - 1 \text{ يقبل القسمة على } 8) \Rightarrow (n \text{ عدد فردي}) .$$

← إذا كانت n عددا فرديا ، فإن : $n = 4k + r$ حيث $k \in \mathbb{N}$ و $r \in \{1;3\}$ في حالة $r = 1$ ، لدينا :

$$n^2 - 1 = (4k + 1)^2 - 1 = 4k \times (4k + 2) = 8k(2k + 1)$$

إذن $n^2 - 1$ يقبل القسمة على 8 .

و في حالة $r = 3$ ، لدينا :

$$n^2 - 1 = (4k + 3)^2 - 1 = (4k + 2) \times (4k + 4) = 8(k + 1)(2k + 1)$$

إذن $n^2 - 1$ يقبل القسمة على 8 .

و بالتالي ، فإن : $(n^2 - 1)$ يقبل القسمة على 8 $\Rightarrow$ (n عدد فردي) .

• التمرين رقم 08:

1- نبين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N}), \frac{n(n^2 + 5)}{6} \in \mathbb{N}$.

← بالنسبة ل $n = 0$ ، لدينا : $\frac{0 \times (0^2 + 5)}{6} = 0 \in \mathbb{N}$.

← ليكن n من $\mathbb{N}^*$ بحيث $\frac{n(n^2 + 5)}{6} \in \mathbb{N}$ (إفترض التراجع) ، لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)[(n+1)^2 + 5]}{6} &= \frac{(n+1)[(n^2 + 5) + (2n + 1)]}{6} \\ &= \frac{n(n^2 + 5) + [(n^2 + 5) + (n+1)(2n+1)]}{6} \\ &= \frac{n(n^2 + 5)}{6} + \frac{3n^2 + 3n + 6}{6} \\ &= \frac{n(n^2 + 5)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} + 1 \end{aligned}$$

و بما أن : $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$ و $\frac{n(n^2 + 5)}{6} \in \mathbb{N}$ (حسب إفترض التراجع)

$$\frac{(n+1)[(n+1)^2 + 5]}{6} \in \mathbb{N} \text{ : فإن } .$$

و بالتالي فإن : $(\forall n \in \mathbb{N}), \frac{n(n^2 + 5)}{6} \in \mathbb{N}$.

2- نبين الآن بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \sum_{k=1}^n k \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4 \times 5^{n+1} - (5+n)4^{n+1}}{5^n}$.

$$\frac{4 \times 5^{1+1} - (5+1)4^{1+1}}{5^1} = \frac{100 - 96}{5} = \frac{4}{5} \text{ و } \sum_{k=1}^1 k \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4}{5} \text{ : لدينا } , n = 1 \text{ من أجل } \leftarrow$$

إذن العلاقة السابقة محققة من أجل $n = 1$.

◀ نفترض أن : $\sum_{k=1}^n k \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4 \times 5^{n+1} - (5+n)4^{n+1}}{5^n}$ حيث $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

و لنبين أن : $\sum_{k=1}^{n+1} k \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4 \times 5^{(n+1)+1} - (5+(n+1))4^{(n+1)+1}}{5^{n+1}}$ (؟؟؟؟) .

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \left(\frac{4}{5}\right)^k = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{4}{5}\right)^k + (n+1) \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \text{ لدينا :}$$

و باستعمال إفتراض التراجع ، نحصل على :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4 \times 5^{n+1} - (5+n)4^{n+1}}{5^n} + (n+1) \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

إذن :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k \left(\frac{4}{5}\right)^k &= \frac{5[4 \times 5^{n+1} - (5+n)4^{n+1}] + (n+1)4^{n+1}}{5^{n+1}} \\ &= \frac{4 \times 5^{(n+1)+1} + [(n+1) - 5(5+n)]4^{n+1}}{5^{n+1}} \\ &= \frac{4 \times 5^{(n+1)+1} - (24+4n)4^{n+1}}{5^{n+1}} \\ &= \frac{4 \times 5^{(n+1)+1} - (6+n)4^{(n+1)+1}}{5^{n+1}} \\ &= \frac{4 \times 5^{(n+1)+1} - (5+(n+1))4^{(n+1)+1}}{5^{n+1}} \end{aligned}$$

و بالتالي فإب : $\sum_{k=1}^n k \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4 \times 5^{n+1} - (5+n)4^{n+1}}{5^n}$. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$