

تمرين 1: A و B و C و M نقط من المستوى. نعتبر المتجهة: $\vec{u} = \vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}$

(1) بين أن: $\vec{u} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$

(2) نعتبر المتجهة $\vec{v} = 2\vec{BA} - 6\vec{BC}$ ، بين أن: \vec{u} و \vec{v} مستقيمتان.

تمرين 2: ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A .

و لتكن G بحيث: $\vec{GA} + 3\vec{GB} - \vec{GC} = \vec{0}$

(1) أثبت أن: $\vec{AG} = \vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$

(2) أنشئ النقطة K بحيث: $\vec{AK} = -\frac{1}{3}\vec{AC}$

(3) أثبت أن الرباعي $ABGK$ مستطيل واستنتج إنشاء النقطة G .

(4) لتكن E النقطة من (AB) بحيث: $\vec{AE} = \frac{3}{4}\vec{AB}$ ، أثبت أن النقط E و C و G مستقيمية

تمرين 3: ليكن ABC مثلثا ولتكن A' و B' و C' هي على التوالي منتصفات $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$

(1) أثبت أن: $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \vec{0}$

(2) أثبت أن: $\vec{BB'} = -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ و $\vec{CC'} = -\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AB}$

(3) لتكن E و F نقطتين من المستوى بحيث: $\vec{BE} = 2\vec{BB'}$ و $\vec{CF} = 2\vec{CC'}$

أ) ماهي طبيعة الرباعيين $ACBF$ و $ABCE$ ؟
ب) برهن أن النقط E و A و F مستقيمية.

تمرين 4: ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع و O نقطة من المستوى.

(1) أنشئ النقط P و Q و R و I حيث: $\vec{OP} = 3\vec{OA}$ و $\vec{PQ} = 3\vec{AD}$ و $\vec{OR} = 3\vec{OB}$ و $RPQI$ متوازي أضلاع

(2) بين أن النقط O و D و Q مستقيمية.

(3) بين أن \vec{PR} و \vec{AB} مستقيمتان.

(4) أثبت أن: O و C و I مستقيمية.

تمرين 5: \vec{u} و \vec{v} متجهتان غير مستقيمتان.

حدد العددين x و y إذا علمت أن: $(5x-1)\vec{u} + (y^2+1)\vec{v} = (x+3)\vec{u} + 2y\vec{v}$

تمرين 6: ليكن ABC ، نعتبر النقط E و F و G بحيث: $\vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ ، $\vec{AF} = 2\vec{CF}$ ، $2\vec{GE} + \vec{GC} = \vec{0}$ ،

(1) أنشئ E و F و G

(2) بين ان $\vec{BF} = 2\vec{EC}$

(3) المستقيم (AG) يقطع (BC) في النقطة K . بين أن K منتصف $[BC]$

تمرين 7: ليكن ABC مثلثا و E نقطة بحيث: $\vec{AE} = 3\vec{AB} + 4\vec{AC}$

(1) أنشئ النقطة E

(2) لتكن I نقطة تقاطع المستقيمين (AE) و (BC) . نضع $\vec{AE} = a\vec{AI}$ و $\vec{CI} = b\vec{IB}$ (حيث $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$)

أ) بين أن $(a-7)\vec{AI} = (3-4b)\vec{IB}$

ب) استنتج قيمة العددين a و b ثم حدد وضع النقطة I على القطعة $[AE]$.

تمرين 8 : - مزيداً من التفكير -

ABCD متوازي أضلاع، E و M نقطتان حيث : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EM} = \frac{2}{5} \overrightarrow{EC}$

بين أن النقط B و M و D مستقيمات.

تمرين 1: A و B و C و M نقط من المستوى. نعتبر المتجهة: $\vec{u} = \vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}$

لنبين أن \vec{u} و \vec{v} مستقيمتان.

$$\vec{u} = \vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}$$

$$\vec{v} = 2\vec{BA} - 6\vec{BC} = 2\vec{BA} - 6(\vec{BA} + \vec{AC})$$

$$\vec{v} = 2\vec{BA} - 6\vec{BA} - 6\vec{AC} = -4\vec{BA} - 6\vec{AC} \quad \text{لدينا:}$$

$$\vec{v} = 4\vec{AB} - 6\vec{AC} = 2(2\vec{AB} - 3\vec{AC}) = 2\vec{u}$$

بالتالي \vec{u} و \vec{v} مستقيمتان.

$$\vec{u} = \vec{MA} + 2(\vec{MA} + \vec{AB}) - 3(\vec{MA} + \vec{AC})$$

$$\vec{u} = \vec{MA} + 2\vec{MA} + 2\vec{AB} - 3\vec{MA} - 3\vec{AC}$$

$$\vec{u} = 3\vec{MA} - 3\vec{MA} + 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$$

$$\vec{u} = \vec{0} + 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$$

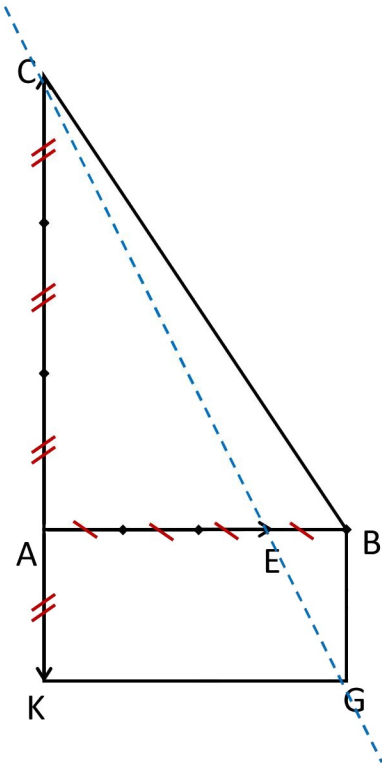
$$\vec{u} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$$

لدينا:

لإثبات استقامة متجهتين نبين أن إحداهما تساوي جذاء الأخرى في عدد حقيقي

تمرين 2: ABC مثلث قائم الزاوية في A . $\vec{GA} + 3\vec{GB} - \vec{GC} = \vec{0}$.

3



$$\vec{GA} + 3\vec{GB} - \vec{GC} = \vec{0}$$

$$\vec{GA} + 3(\vec{GA} + \vec{AB}) - (\vec{GA} + \vec{AC}) = \vec{0}$$

$$\vec{GA} + 3\vec{GA} + 3\vec{AB} - \vec{GA} - \vec{AC} = \vec{0}$$

$$3\vec{GA} + 3\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{0}$$

$$3\vec{GA} = -3\vec{AB} + \vec{AC}$$

$$-3\vec{GA} = 3\vec{AB} - \vec{AC}$$

$$3\vec{AG} = 3\vec{AB} - \vec{AC}$$

$$\vec{AG} = \frac{3}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$$

$$\vec{AG} = \vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$$

1

أثناء الحساب المتجهي نستعمل بعض قواعد الحساب العددي التي تظل صحيحة، إذ يمكننا نقل متجهة من طرف متساوية للطرف الآخر شرط تغيير إشارة معاملها، كما يمكننا نشر تعبير متجهي:

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$$

$$\text{معاملها: } a\vec{MN} = -a\vec{NM}$$

$$\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AK}$$

$$\vec{AG} - \vec{AK} = \vec{AB}$$

$$\vec{AG} + \vec{KA} = \vec{AB}$$

$$\vec{KA} + \vec{AG} = \vec{AB}$$

$$\vec{KG} = \vec{AB}$$

$$\text{لدينا } \vec{AG} = \vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC} \text{ و } \vec{AK} = \frac{-1}{3}\vec{AC} \text{ إذن:}$$

2

إذن الرباعي $ABGK$ متوازي أضلاع و هو ما يسمح بإنشاء النقطة G

استعنا في السؤال بخاصية تبادلية جمع متجهتين وعلاقة شال.

$$\text{لدينا: } \vec{CE} = \vec{CA} + \vec{AE} \text{ ولدينا: } \vec{CA} = 3\vec{AK} \text{ (لأن } \vec{AK} = \frac{-1}{3}\vec{AC} \text{) و } \vec{AE} = \frac{3}{4}\vec{AB}$$

$$\text{إذن: } \vec{CE} = 3\vec{AK} + \frac{3}{4}\vec{AB}$$

3

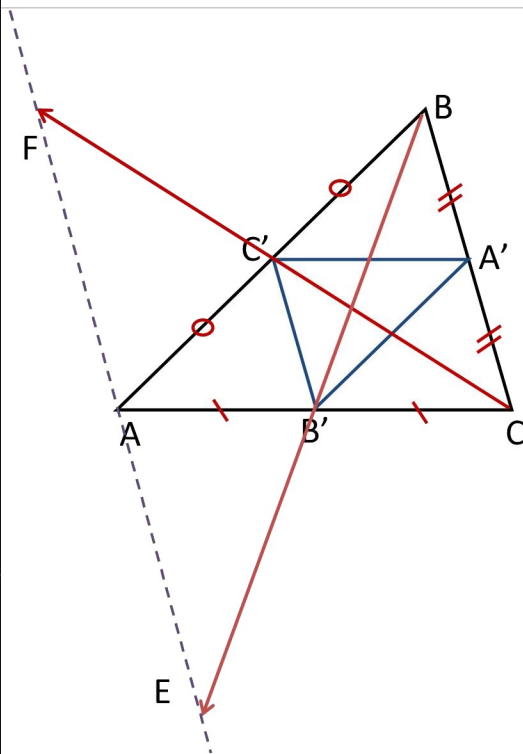
من جهة أخرى لدينا: $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KG}$ ولدينا: $\overrightarrow{CK} = 4\overrightarrow{AK}$ (لأن $\overrightarrow{AK} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AC}$) و $\overrightarrow{KG} = \overrightarrow{AB}$ (لأن

$ABGK$ متوازي أضلاع)، إذن: $\overrightarrow{CG} = 4\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AB}$

نستنتج إذن أن: $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{AK} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}(4\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AB}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{CG}$ بالتالي النقط E و C و G مستقيمة

أثناء إنشاء النقطة K قمنا بتقسيم القطعة $[AC]$ إلى 3 قطع متقايسة، لذلك يمكننا و بالاستعانة بالشكل استخراج مساويات متجهية يمكن أن تساعدنا في البرهان كـ $\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{AK}$ (لكن إذا أردت استعمال مساوية مستخرجة من الشكل يجب أن تحدد المعطيات الملائمة: $\overrightarrow{AK} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AC}$).
من ناحية أخرى إثبات بعض المتساويات المتجهية يتطلب بحثا ليس من السهل إيجاده بسرعة، هذا يعني أن إتقان هذا الأمر يتطلب مهارات تكتسب بانجاز التمارين مع البحث كل مرة عن الطريقة الأكثر وضوحا لإيجاد الحل.

تمرين 3: مثلث ABC مثلث، A' و B' و C' هي على التوالي منتصفات $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$



لدينا A' منتصف $[BC]$ إذن: $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

ولدينا B' منتصف $[AC]$ إذن: $\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$

ولدينا C' منتصف $[AB]$ إذن: $\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{0} + \vec{0} + \vec{0}) = \vec{0} \end{aligned}$$

1

استعنا بالخاصية الهامة: إذا كانت I منتصف قطعة $[AB]$ فإنه

$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$$

$$\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

2

لدينا: $\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ منه $2\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

ولدينا: $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{CC'}$ ، إذن $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

إذن: $ACBF$ متوازي أضلاع

لدينا: $\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ منه $2\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

ولدينا: $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BB'}$ ، إذن $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

إذن: $ABCE$ متوازي أضلاع

أ

3

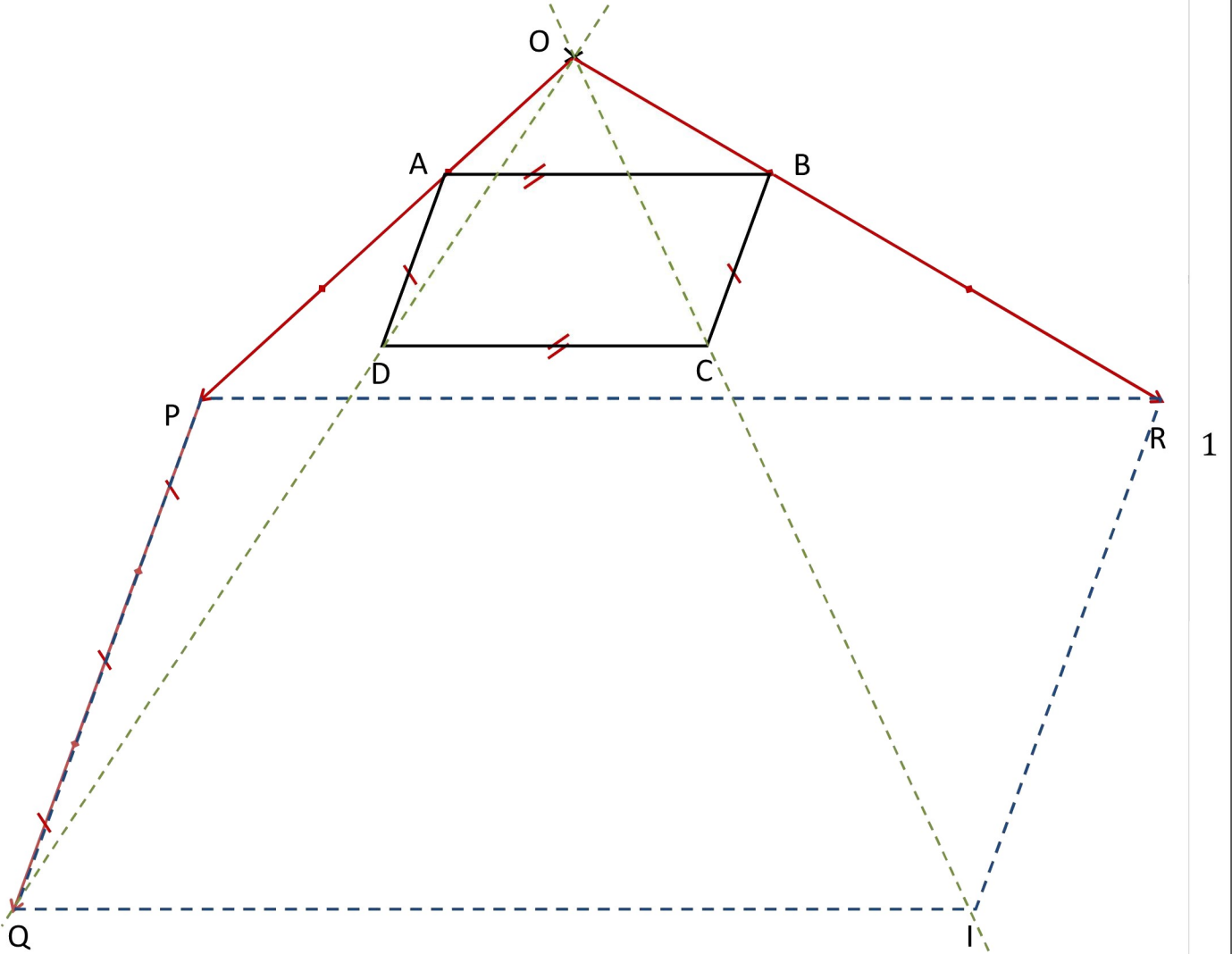
لدينا $ABCE$ متوازي أضلاع إذن: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$ و لدينا $ACBF$ متوازي أضلاع إذن: $\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{BC}$

منه: $\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AE}$ ، بالتالي النقط E و A و F مستقيمة.

ب

تمرين 4: ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع و O نقطة من المستوى.

$\vec{OP}=3\vec{OA}$ و $\vec{PQ}=3\vec{AD}$ و $\vec{OR}=3\vec{OB}$ و متوازي أضلاع $RPQI$



1

لنبين أن النقط O و D و Q مستقيمية.

لدينا: $\vec{OP}=3\vec{OA}$ ، $\vec{PQ}=3\vec{AD}$ ، إذن: $\vec{OQ}=\vec{OP}+\vec{PQ}=3\vec{OA}+3\vec{AD}=3(\vec{OA}+\vec{AD})=3\vec{OD}$

بالتالي النقط O و D و Q مستقيمية.

بين أن \vec{AB} و \vec{PR} مستقيمتان.

لدينا: $\vec{OR}=3\vec{OB}$ ، $\vec{OP}=3\vec{OA}$ ، إذن: $\vec{PR}=\vec{PO}+\vec{OR}=3\vec{AO}+3\vec{OB}=3(\vec{AO}+\vec{OB})=3\vec{AB}$

بالتالي \vec{AB} و \vec{PR} مستقيمتان.

أثبت أن: O و C و I مستقيمية.

لدينا $RPQI$ متوازي أضلاع منه: $\vec{QI}=\vec{PR}$ منه: $\vec{OI}=\vec{OQ}+\vec{QI}=3\vec{OD}+\vec{PR}=3\vec{OD}+3\vec{AB}$

ولدينا $ABCD$ متوازي أضلاع منه: $\vec{AB}=\vec{DC}$ منه: $\vec{OI}=3\vec{OD}+3\vec{DC}=3(\vec{OD}+\vec{DC})=3\vec{OC}$

بالتالي: O و C و I مستقيمية.

4

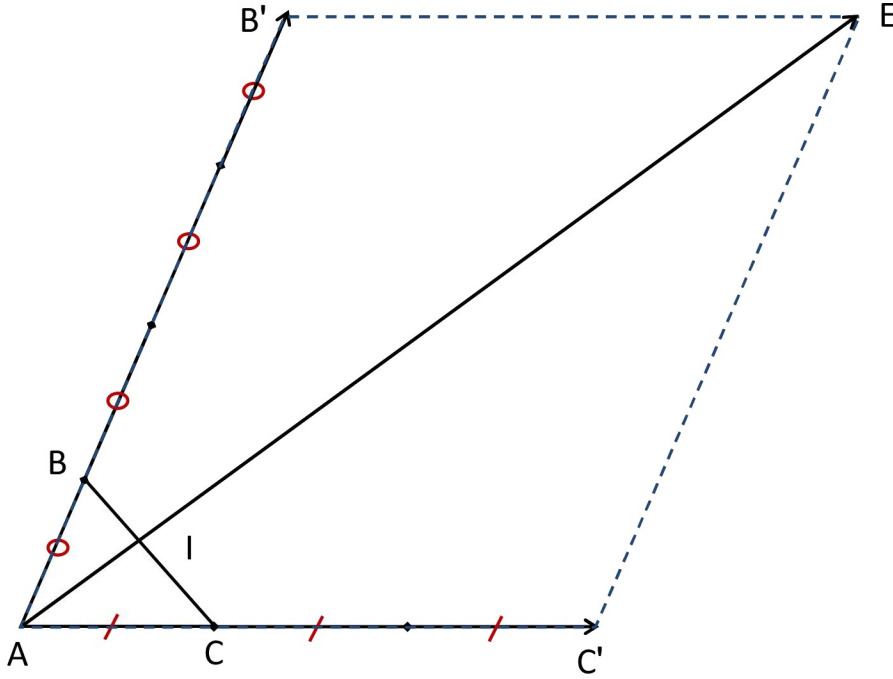
تمرين 5: لدينا $(5x-1)\vec{u}+(y^2+1)\vec{v}=(x+3)\vec{u}+2y\vec{v}$ منه: $(y^2+1)\vec{v}-2y\vec{v}=(x+3)\vec{u}-(5x-1)\vec{u}$

منه: $(y^2+1-2y)\vec{v}=(x+3-5x+1)\vec{u}$ منه: $(y-1)^2\vec{v}=(-4x+4)\vec{u}$

وبما أن \vec{u} و \vec{v} متجهتان غير مستقيمتان فإن: $(y-1)^2=0$ و $-4x+4=0$ (وإلا لاستطعنا كتابة إحداهما

على شكل جداء عدد حقيقي في الأخرى)، منه: $y=1$ و $x=1$

تمرين 7: ليكن ABC مثلثا و E نقطة بحيث: $\vec{AE} = 3\vec{AB} + 4\vec{AC}$



1

لدينا: $\vec{AE} = a\vec{AI}$ و $\vec{CI} = b\vec{IB}$ و $\vec{AE} = 3\vec{AB} + 4\vec{AC}$
 إذن: $a\vec{AI} = 3\vec{AB} + 4\vec{AC}$ منه: $a\vec{AI} = 3\vec{AI} + 3\vec{IB} + 4\vec{AI} + 4\vec{IC}$ منه: $a\vec{AI} = 7\vec{AI} + 3\vec{IB} - 4b\vec{IB}$
 بالتالي: $(a-7)\vec{AI} = (3-4b)\vec{IB}$

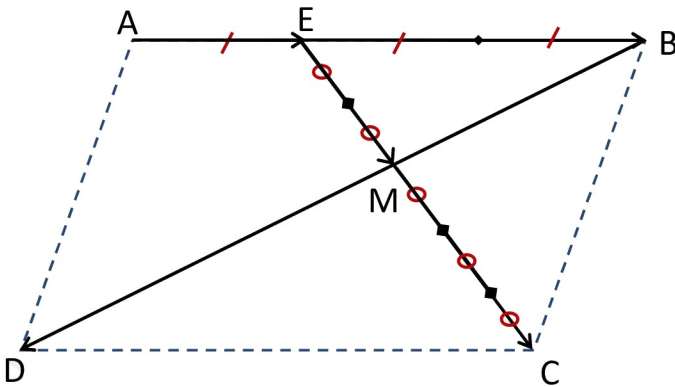
2

بما أن المتجهين \vec{AI} و \vec{IB} غير مستقيمتين فإن: $a-7=0$ و $3-4b=0$ أي: $a=7$ و $b=\frac{3}{4}$
 بالتالي: $\vec{AE} = 7\vec{AI}$ أي: $\vec{AI} = \frac{1}{7}\vec{AE}$

ب

تمرين 8: - مزيدا من التفكير -

ABCD متوازي أضلاع، E و M نقطتان حيث: $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ و $\vec{EM} = \frac{2}{5}\vec{EC}$



لدينا:

$$\begin{aligned}\vec{BM} &= \vec{BE} + \vec{EM} = \vec{BE} + \frac{2}{5}\vec{EC} = \vec{BE} + \frac{2}{5}(\vec{EB} + \vec{BC}) \\ &= \left(1 - \frac{2}{5}\right)\vec{BE} + \frac{2}{5}\vec{BC} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3}\vec{BA} + \frac{2}{5}\vec{BC} \\ \vec{BM} &= \frac{2}{5}(\vec{BA} + \vec{BC}) = \frac{2}{5}\vec{BD}\end{aligned}$$

بالتالي B و M و D مستقيمية.