أكاديمية الجهة الشرقية

تمارين محلولة:المستقيم في المستوى

المستوى : الجذع مشترك علمي و الجذع مشترك تكنولوجي

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: ABC مثلث ولتكن النقطة M بحيث $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

حدد زوج إحداثيتي النقطة M في المعلم $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

الجواب :

زوج إحداثيتي النقطة M في المعلم $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ هو $(3,-2)$.

تمرين2: ليكن $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ معلما إذا كانت $A\,(1,-4)$ و $B\,(-3,7)$ نقطتين

حدد زوج إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$ في الأساس $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$

الجواب : $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A,y_B-y_A\right)$ أي أن $\overrightarrow{AB}\left(-3-1,7-(-4)\right)$ و بالتالي $\overrightarrow{AB}\,(-4,11)$

ومنه: $\overrightarrow{AB}=-4\vec{i}+11\vec{j}$

تمرين3: نعتبر في الأساس $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ المتجهتين $\vec{u}\,(3,-2)$ و $\vec{v}\,(-5,1)$

حدد زوج إحداثيتي المتجهات التالية : $\vec{u}+\vec{v}$ و $5\vec{u}$ و $3\vec{u}-2\vec{v}$

الأجوبة : $\vec{u}\,(3,-2)$ يعني $\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}$

$\vec{v}\,(-5,1)$ يعني $\vec{v}=-5\vec{i}+\vec{j}$

ومنه : $\vec{u}+\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}-5\vec{i}+\vec{j}=-2\vec{i}-\vec{j}$ أي : $\vec{u}+\vec{v}\,(-2,-1)$

زوج إحداثيتي المتجهة $5\vec{u}$ هو $\left(5\times3,5(-2)\right)$ أي $5\vec{u}\,(15,-10)$

$3\vec{u}-2\vec{v}=9\vec{i}-6\vec{j}+10\vec{i}-2\vec{j}=19\vec{i}-8\vec{j}$ أي : $3\vec{u}-2\vec{v}(19,-8)$

تمرين4: ليكن $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ معلما متعامدا ممنظما. إذا كانت: $A\,(3,1)$ و $B\,(-1,2)$

1) حدد زوج إحداثيتي M منتصف القطعة $[AB]$

2) حدد المسافة بين النقطتين A و B

الجواب : 1) $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ يعني $I\left(\frac{3-1}{2};\frac{2+1}{2}\right)$ يعني $I\left(1;\frac{3}{2}\right)$

2) $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$ أي أن $AB=\sqrt{(-1-3)^2+(2-1)^2}$

و بالتالي: $AB=\sqrt{17}$

تمرين5: في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$

نعتبر النقط: $A(1,2)$, $B(-3,-1)$, $C(3,-2)$ والمتجهتين $\vec{u}\,(-2,3)$ و $\vec{v}\,(2,4)$

1. حدد زوج إحداثيتي النقطة D حيث $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$
2. حدد زوج إحداثيتي I منتصف $[AB]$
3. أحسب المسافات التالية: AB و AC و BC

الأجوبة : 1)لدينا : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$ و لدينا : $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A;y_B-y_A\right)$

$\overrightarrow{AB}\,(-3-1;-1-2)$ يعني $\overrightarrow{AB}\,(-4;-3)$

$\overrightarrow{BD}\left(x_D-x_B;y_D-y_B\right)$ يعني $\overrightarrow{BD}\left(x_D+3;y_D+1\right)$

ولدينا : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$ اذن : $\begin{cases}x_D+3=-4\\ y_D+1=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=-7\\ y_D=-4\end{cases}$

2) $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ يعني $I\left(\frac{1-3}{2};\frac{2-1}{2}\right)$ يعني $I\left(-1;\frac{1}{2}\right)$

3) $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}=\sqrt{(-3-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

$AC=\sqrt{\left(x_C-x_A\right)^2+\left(y_C-y_A\right)^2}=\sqrt{(3-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

$BC=\sqrt{\left(x_C-x_B\right)^2+\left(y_C-y_B\right)^2}=\sqrt{(3+3)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}$

تمرين6: نعتبر في الأساس $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ المتجهتين $\vec{u}(3,-2)$ و $\vec{v}(-6,4)$

هل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين ؟

الجواب : طريقة 1 : نحسب المحددة :

$$\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}3 & -6\\ -2 & 4\end{vmatrix}=3\times4-(-6)\times(-2)=12-12=0$$

ومنه $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين

طريقة 2 : $\vec{u}\,(3,-2)$ يعني $\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}$

$\vec{v}\,(-6,4)$ يعني $\vec{v}=-6\vec{i}+4\vec{j}$

$\vec{v}=-6\vec{i}+4\vec{j}=-2\left(3\vec{i}-2\vec{j}\right)=-2\vec{u}$ ومنه $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين

تمرين7: في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$

نعتبر النقط: $A\left(\frac{1}{2},3\right)$, $B(-2,-2)$, $C(1,4)$ و المتجهة $\vec{u}\,(1,3)$

1. حدد x بحيث $\vec{u}$ و $\vec{v}\,(x-2,5)$ مستقيميتان
2. بين أن النقط A و B و C مستقيمية

الجواب: 1) $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين يعني : $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$

يعني : $\begin{vmatrix}1 & x-2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=0$ يعني : $5\times1-3(x-2)=0$

يعني : $5-3x+6=0$ يعني : $x=\frac{11}{3}$

2) $\overrightarrow{AB}\left(-2-\frac{1}{2};-2-3\right)$ يعني $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{5}{2};-5\right)$

$\overrightarrow{AC}\left(1-\frac{1}{2};4-3\right)$ يعني $\overrightarrow{AC}\left(\frac{1}{2};1\right)$

$$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}-\frac{5}{2} & \frac{1}{2}\\ -5 & 1\end{vmatrix}=-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=0$$

ومنه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتين وبالتالي :
النقط A و B و C مستقيمية

تمرين8: نعتبر المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-1$

حدد متجهة موجهة ل (D)

الجواب: النقطتان $A\,(1;0)$ و $B\,(0;-1)$ تنتميان إلى (D).

إذن: $\overrightarrow{AB}\,(-1;-1)$ متجهة موجهة للمستقيم (D).

تمرين9: نعتبر النقطة $A\,(3;-5)$ و المتجهة $\vec{u}\,(-2;3)$

حدد تمثيلاً بارامتري للمستقيم $D\left(A;\vec{u}\right)$

الجواب: $\begin{cases}x=3-2t\\ y=-5+3t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$

تمرين10: في المستوى $(o;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر النقط: $A(-2,1)$, $B(3,7)$

1. حدد تمثيلا باراميتريا للمستقيم (AB)
2. حدد نقط تقاطع المستقيم (AB) مع محوري المعلم

الجواب :1) $\overrightarrow{AB}(3+2;7-1)$ يعني : $\overrightarrow{AB}(5;6)$

المستقيم يمر من النقطة $A(-2,1)$ و $\overrightarrow{AB}$ موجهة له

اذن : $(AB)\begin{cases}x=-2+5t\\y=1+6t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

2) أ) التقاطع مع محور الأفاصيل: $y=6t+1=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{6}$

$x=5t-2$ يعني $x=-\frac{17}{6}$ ومنه نقطة التقاطع هي : $C\left(-\frac{17}{6},0\right)$

أ) التقاطع مع محور الأراتيب : $x=5t-2=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{5}$

$y=6t+1 \Leftrightarrow$ يعني $y=6\times\frac{2}{5}+1=\frac{17}{5}$ ومنه نقطة التقاطع هي : $D\left(0,\frac{17}{5}\right)$

تمرين11: نعتبر في المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ النقط $A(2;4)$ و $B(5;-1)$ حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (AB).

الجواب :طريقة1

$M(x,y)\in(AB)$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مستقيميتين

يعني $\det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})=0$ يعني $\begin{vmatrix}x-2&3\\y-4&-5\end{vmatrix}=0$ لأن: $\overrightarrow{AM}(x-2,y-4)$ و $\overrightarrow{AB}(3,-5)$

يعني $-5(x-2)-3(y-4)=0$ يعني $-5x+10-3y+12=0$

يعني $-5x-3y+22=0$ (AB)

طريقة2:نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل : $ax+by+c=0$ (AB)

ونعلم أن : $\overrightarrow{AB}(3,-5)$ متجهة موجهة له : $\overrightarrow{AB}(-b,a)$

اذن : $-b=3$ و $a=-5$ اذن : $b=-3$ و $a=-5$

ومنه: (AB) $-5x-3y+c=0$

يجب الآن البحث عن c نعلم أن: $A\in(AB)$ اذن احداثياته تحقق

المعادلة : $-5\times2-3\times4+c=0$ (AB) يعني : $c=22$

ومنه: (AB) $-5x-3y+22=0$

تمرين12: نعتبر في المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ النقطة $A(1;2)$ و المتجهة $\vec{u}(-2;1)$

1. حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (D) المار من النقطة : $A(1;2)$ و الموجه بالمتجهة $\vec{u}$
2. هل النقطة $B(0;5)$ تنتمي للمستقيم (D)؟
3. حدد نقطة أخرى تنتمي ل (D)

الجواب:1)طريقة1: $M(x,y)\in(D)$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيميتين

يعني $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0$ يعني $\begin{vmatrix}x-1&-2\\y-2&1\end{vmatrix}=0$ لأن: $\overrightarrow{AM}(x-1,y-2)$

يعني $1(x-1)+2(y-2)=0$ يعني $x-1+2y-4=0$ يعني $x+2y-5=0$ (D)

طريقة2:نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل : (D) $ax+by+c=0$

ونعلم أن : $\vec{u}(-2,1)$ متجهة موجهة له : $\vec{u}(-b,a)$

اذن : $-b=-2$ و $a=1$ اذن : $b=2$ و $a=1$

ومنه: $1x+2y+c=0$ يجب الآن البحث عن c

نعلم أن: $A\in(AB)$ اذن احداثياته تحقق المعادلة : $2+4+c=0$

يعني: $c=-5$ ومنه: $x+2y-5=0$ (D)

2) $B(0,5)$???? نعوض باحداثيات النقطة B في معادلة المستقيم (D)

$0+2\times5-5=10-5=5\neq0$ اذن : $B\notin(D)$

3)نعطي للمتغير x قيمة ونبحث عن y في معادلة (D) أو العكس

مثلا : نضع $x=1$ يعني $2y=4$ يعني $y=2$ ومنه : $C(1;2)\in(D)$

تمرين13: نعتبر في المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المستقيم (D) الذي معادلته : $2x-5y+4=0$

1. حدد متجهة موجهة بالمتجهة للمستقيم (D)
2. أرسم المستقيم (D)

الجواب: 1) $ax+by+c=0$ $2x-5y+4=0$

اذن: $a=2$ و $a=-5$ ومنه : $\vec{u}(-b,a)\Leftrightarrow\vec{u}(5,2)$ موجهه ل (D)

تمرين14: نعتبر المستقيمين $(D):x-2y+6=0$ و $(D'):-2x+4y+1=0$

بين $(D)\parallel(D')$

الجواب : $(-2)\times(-2)-4\times1=4-4=0$ اذن: $(D)\parallel(D')$

تمرين15: نعتبرفي المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم المستقيمات: $(D_1):6x+3y+2=0$ و $(D_2):3x-2y-1=0$

و النقط التالية : $A(1,2)$ و $B(3,-2)$

1. بين أن (D_1) و (D_2) متقاطعان و حدد نقطة تقاطعهما
2. حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (AB).
3. حدد الوضع النسبي للمستقيمين (D_1) و (AB).
4. حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (Δ) المار من $C(1,2)$ و الموازي للمستقيم (D_1).

الجواب 1): $(6)\times(-2)-3\times3=-12-9=-21\neq0$ اذن: (D_1) و (D_2) متقاطعان

لتحديد نقطة التقاطع نحل النظمة التالية: $\begin{cases}6x+3y+2=0\\3x-2y-1=0\end{cases}$

$(1)\begin{cases}6x+3y=-2\\3x-2y=1\end{cases}$ ونستعمل احدى الطرق لحل هذه النظمة

محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix}6&3\\3&-2\end{vmatrix}=-21\neq0$ و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:هو

$x=\frac{\begin{vmatrix}-2&3\\1&-2\end{vmatrix}}{\Delta}=-\frac{1}{21}$ و $y=\frac{\begin{vmatrix}6&-2\\3&1\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{12}{-21}=-\frac{4}{7}$ و منه نقطة التقاطع : $H\left(-\frac{1}{21};-\frac{4}{7}\right)$

2):نعلم أن معادلة مستقيم (AB) تكتب على الشكل : $ax+by+c=0$

ونعلم أن : $\overrightarrow{AB}(2,-4)$ متجهة موجهة له : $\overrightarrow{AB}(-b,a)$

اذن : $-b=2$ و $a=-4$ اذن : $b=-2$ و $a=-4$ ومنه: $-4x-2y+c=0$

يجب الآن البحث عن c نعلم أن: $A\in(AB)$ اذن احداثياته تحقق:

المعادلة : $-4-4+c=0$ يعني : $c=8$ ومنه: $-4x-2y+8=0$

يعني: $-2(2x+y-4)=0$ يعني: $2x+y-4=0$ (AB)

3) $(D_1):6x+3y+2=0$ و (AB) $2x+y-4=0$

$(6)\times(1)-3\times2=6-6=0$ اذن: (D_1) و (AB) متوازيين

4) (Δ) يوازي للمستقيم (D_1) يعني المتجهة الموجهة ل (D_1) هي أيضا موجهه ل (Δ)

اذن : $\vec{u}(-b,a)$ أي $\vec{u}(-3,6)$ موجهه ل $(D_1):6x+3y+2=0$

وبما أن (Δ) يمر من $C(1,2)$ فان: $(\Delta)\begin{cases} x=1-3t \\ y=2+6t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

تمرين16: نعتبر المستقيمين $(D):3x-5y+6=0$ $\quad (D'):x-y=0$

1. حدد تمثيلا بارامتريا لكل من المستقيم (D) و (D')
2. حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) المار من $B(1,0)$ و الموازي ل (EC) حيث $E(3,3)$ و $C(4,0)$
3. حدد إحداثيات النقط I تقاطع (Δ) و (D) و إحداثيات النقطة J تقاطع (Δ) و (D)
4. بين أن J منتصف $[IB]$

أجوبة: **1)** أ) متجهة موجهة ل $(D):3x-5y+6=0$ هي: $\vec{u}(-b,a)$ أي: $(5,3)$

نحدد نقطة يمر منها المستقيم (D):

نضع مثلا : $x=0$ اذن : $(D):3\times0-5y+6=0$

يعني $y=\frac{6}{5}$ ومنه $I\left(0,\frac{6}{5}\right)\in(D)$ ومنه فان: $(D)\begin{cases} x=0+5t \\ y=\frac{6}{5}+3t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

ب) متجهة موجهة ل $(D'):x-y=0$ هي: $\vec{u'}(-b,a)$ أي: $\vec{u'}(1,1)$

نحدد نقطة يمر منها المستقيم (D')

نضع مثلا : $x=0$ اذن : $(D'):0-y=0$

يعني $y=0$ ومنه $O(0,0)\in(D')$

ومنه فان: $(D')\begin{cases} x=0+1k \\ y=0+1k \end{cases} (k\in\mathbb{R})$

2) (Δ) يمر من B و يوازي ل (EC) اذن: $\overrightarrow{EC}$ متجهة موجهة ل (Δ)

ولدينا: $\overrightarrow{EC}(1;-3)$ وبالمقارنة مع: $\overrightarrow{EC}(-b,a)$ نجد: $b=-1$ و $a=-3$

ومنه: $-3x-y+c=0$

ونعلم أن: (Δ) يمر من $B(1,0)$ اذن احداثياته تحقق:

المعادلة : $-3+0+c=0$ يعني : $c=3$ ومنه: $(\Delta)\ -3x-y+3=0$

3)أ) إحداثيات I تقاطع (Δ) و (D)

لتحديد نقطة التقاطع نحل النظمة التالية: $\begin{cases} 3x-5y+6=0 \\ -3x-y+3=0 \end{cases} \quad (1)$

ونستعمل احدى الطرق لحل هذه النظمة

نجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد: $-6y+9=0 \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}$

وبالتعويض في المعادلة نجد: $-3x-\frac{3}{2}+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

و منه نقطة التقاطع : $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

3)ب) إحداثيات J تقاطع (Δ) و (D')

نحل النظمة التالية: $\begin{cases} x-y=0 \\ -3x-y+3=0 \end{cases}$

$x-y=0 \Leftrightarrow x=y$ وبالتعويض في المعادلة الأخرى نجد:

$-3x-x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4} \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}$ و منه نقطة التقاطع : $j\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)$

4)نبين أن J منتصف $[IB]$

يكفي أن نبين أن : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JB}$???

لدينا : $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{4};-\frac{3}{4}\right)$ ولدينا $\overrightarrow{JB}\left(\frac{1}{4};-\frac{3}{4}\right)$ اذن: $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JB}$ ومنه J منتصف $[IB]$