الحساب المثلثي- الجزء الثاني

من اقتراح أذ : لخريسي سمير

تمارين مقترحة

تمرين 1

حل في IR المعادلات التالية :

$2\sin\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$	$\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2\cos x+1=0$	$2\sin x+\sqrt{2}=0$
$2\sin x+\tan x=0$	$\cos(3x).(\sin x-1)=0$	$\sin x=\cos x$	$\sin\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$
$4\cos^2 x-1=0$	$3\tan^2 x-1=0$	$\sin^2 x-4=0$	$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

تمرين 2

حل في المجال $[0,2\pi]$ ثم في المجال $[-\pi,\pi]$ المتراجحات التالية :

$2\cos x \le -\sqrt{3}$	$2\cos x \le \sqrt{2}$	$2\cos x+\sqrt{3}\ge 0$	$2\cos x \ge 1$
$\cos x \le -5$	$\cos x \le 4$	$\cos x \ge 2$	$-\sqrt{2}\le 2\cos x \le 1$
$\tan x \ge 1$	$-1\le 2\sin x \le \sqrt{2}$	$2\sin x+\sqrt{2}\ge 0$	$2\sin x \le -\sqrt{3}$
$\cos x \ge \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$	$\sin x \ge \sin\left(\frac{-\pi}{5}\right)$	$\sqrt{3}\tan x \le -1$	$\tan x < \sqrt{3}$

تمرين 3

أ- حدد حلول المعادلة: $2\sin x-1=0$ في المجال $I=[0,3\pi]$

ب- حل في المجال I المتراجحة : $2\sin x-1\ge 0$

تمرين 4

أ- حدد حلول المعادلة: $2\cos x+1=0$ في المجال $J=[0,5\pi]$

ب- حل في المجال J المتراجحة : $2\cos x+1>0$

تمرين 5

أ- حدد حلول المعادلة: $\tan x=\sqrt{3}$ في المجال $K=[0,4\pi]$

ب- حل في المجال K المتراجحة : $\tan x=\sqrt{3}$

الحساب المثلثي

حلـــول مقترحة

من اقتراح أذ : لخريسي سمير

تمرين 1

لدينا $2\sin x+\sqrt{2}=0$ يعني : $\sin x=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ يعني $\sin x=\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)$

يعني : $x=\pi-\left(\frac{-\pi}{4}\right)+2k\pi/k\in Z$ أو $x=\frac{-\pi}{4}+2k\pi/k\in Z$

بالتالي : $S=\left\{\frac{-\pi}{4}+2k\pi/k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{4}+2k\pi/k\in Z\right\}$

لدينا $2\cos x+1=0$ يعني : $\cos x=\frac{-1}{2}$ يعني : $\cos x=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

يعني : $x=\frac{-2\pi}{3}+2k\pi/k\in Z$ أو $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi/k\in Z$

بالتالي : $S=\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi/k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{-2\pi}{3}+2k\pi/k\in Z\right\}$

لدينا $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ يعني : $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

يعني : $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{-\pi}{4}+2k\pi/k\in Z$ أو $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+2k\pi/k\in Z$

يعني : $2x=\frac{-\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi/k\in Z$ أو $2x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi/k\in Z$

يعني : $2x=\frac{\pi}{12}+2k\pi/k\in Z$ أو $2x=\frac{7\pi}{12}+2k\pi/k\in Z$

يعني : $x=\frac{\pi}{24}+k\pi/k\in Z$ أو $x=\frac{7\pi}{24}+k\pi/k\in Z$

بالتالي : $S=\left\{\frac{\pi}{24}+k\pi/k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{7\pi}{24}+k\pi/k\in Z\right\}$

لدينا $2\sin\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ يعني : $\sin\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

يعني : $3x-\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi/k\in Z$ أو $3x-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi/k\in Z$

يعني : $3x=\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+2k\pi/k\in Z$ أو $3x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+2k\pi/k\in Z$

يعني : $3x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi/k\in Z$ أو $3x=\pi+2k\pi/k\in Z$

يعني : $x=\frac{4\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}/k\in Z$ أو $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}/k\in Z$

بالتالي : $S=\left\{\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}/k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{4\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}/k\in Z\right\}$

تذكر القواعد : $\sin(a)=\sin(b)$ تعني : $a=b+2k\pi/k\in Z$ أو $a=\pi-b+2k\pi/k\in Z$

و $\cos(a)=\cos(b)$ تعني : $a=b+2k\pi/k\in Z$ أو $a=-b+2k\pi/k\in Z$

تمرين 1

لدينا : $\sin\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

يعني $5x-\frac{\pi}{3}=x+\frac{\pi}{3}+2k\pi / k\in Z$ أو $5x-\frac{\pi}{3}=\pi-\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi / k\in Z$

يعني $5x-x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+2k\pi / k\in Z$ أو $5x-\frac{\pi}{3}=\pi-x-\frac{\pi}{3}+2k\pi / k\in Z$

يعني $4x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi / k\in Z$ أو $6x=\pi+2k\pi / k\in Z$

يعني $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2} / k\in Z$ أو $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3} / k\in Z$

بالتالي : $S=\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2} / k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3} / k\in Z\right\}$

لدينا : $\sin x=\cos x$ يعني : $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

يعني $\frac{\pi}{2}-x=x+2k\pi / k\in Z$ أو $\frac{\pi}{2}-x=-x+2k\pi / k\in Z$

يعني $-2x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi / k\in Z$ أو $\frac{\pi}{2}=2k\pi / k\in Z$

يعني $x=\frac{\pi}{4}-k\pi / k\in Z$ أو $\frac{1}{2}=2k / k\in Z$ (متساوية غير ممكنة لأن $2k$ عدد صحيح و $\frac{1}{2}=0,5$)

بالتالي : $S=\left\{\frac{\pi}{4}-k\pi / k\in Z\right\}$

لدينا: $\cos(3x).(\sin x-1)=0$ يعني : $\cos(3x)=0$ أو $\sin x-1=0$

يعني: $\sin x=1$ أو $\cos(3x)=0$ يعني : $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in Z$ أو $3x=2k\pi / k\in Z$ (استعملنا الدائرة المثلثية)

يعني : $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in Z$ أو $x=\frac{2k\pi}{3} / k\in Z$

بالتالي : $S=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{2k\pi}{3} / k\in Z\right\}$

: القيم 0 و 1 و -1 قيم خاصة

تمرين 1

لدينا : $2\sin x+\tan x=0$ يعني : $2\sin x+\dfrac{\sin x}{\cos x}=0$ يعني : $\sin x\left(2+\dfrac{1}{\cos x}\right)=0$

يعني : $\sin x=0$ أو $2+\dfrac{1}{\cos x}=0$ يعني : $\sin x=0$ أو $\dfrac{1}{\cos x}=-2$

يعني : $\sin x=0$ أو $\cos x=\dfrac{-1}{2}$ يعني : $\sin x=0$ أو $\cos x=\cos\left(\dfrac{2®}{3}\right)$

يعني $x=k® / k\in Z$ أو $x=\dfrac{2®}{3}+2k® / k\in Z$ أو $x=-\dfrac{2®}{3}+2k® / k\in Z$

بالتالي : $S=\{k® / k\in Z\}\cup\left\{\dfrac{2®}{3}+2k® / k\in Z\right\}\cup\left\{-\dfrac{2®}{3}+2k® / k\in Z\right\}$

لدينا : $\sin x=\cos x$ يعني : $\cos\left(\dfrac{®}{2}-x\right)=\cos x$

يعني $\dfrac{®}{2}-x=x+2k® / k\in Z$ أو $\dfrac{®}{2}-x=-x+2k® / k\in Z$

يعني $-2x=\dfrac{-®}{2}+2k® / k\in Z$ أو $\dfrac{®}{2}=2k® / k\in Z$

يعني $x=\dfrac{®}{4}-k® / k\in Z$ أو $\dfrac{1}{2}=2k / k\in Z$ (متساوية غير ممكنة لأن $2k$ عدد صحيح و $\dfrac{1}{2}=0,5$)

بالتالي : $S=\left\{\dfrac{®}{4}-k® / k\in Z\right\}$

لدينا : $\sin\left(x+\dfrac{®}{6}\right)=\cos\left(2x+\dfrac{®}{3}\right)$ يعني : $\cos\left(\dfrac{®}{2}-\left(x+\dfrac{®}{6}\right)\right)=\cos\left(2x+\dfrac{®}{3}\right)$

يعني : $\cos\left(\dfrac{®}{2}-x-\dfrac{®}{6}\right)=\cos\left(2x+\dfrac{®}{3}\right)$ يعني : $\cos\left(\dfrac{®}{3}-x\right)=\cos\left(2x+\dfrac{®}{3}\right)$

يعني : $\dfrac{®}{3}-x=2x+\dfrac{®}{3}+2k® / k\in Z$ أو $\dfrac{®}{3}-x=-\left(2x+\dfrac{®}{3}\right)+2k® / k\in Z$

يعني : $-3x=2k® / k\in Z$ أو $\dfrac{®}{3}-x=-2x-\dfrac{®}{3}+2k® / k\in Z$

يعني : $x=\dfrac{-2k®}{3} / k\in Z$ أو $x=-\dfrac{2®}{3}+2k® / k\in Z$

بالتالي : $S=\left\{\dfrac{-2k®}{3} / k\in Z\right\}\cup\left\{-\dfrac{2®}{3}+2k® / k\in Z\right\}$

: نطبق القواعد السابقة حتى و إن كانت التعابير (داخل النسب المثلثية)مركبة.

تمرين 1

لدينا : $\sin^2 x - 4 = 0$ يعني : $(\sin x - 2)(\sin x + 2) = 0$ يعني : $\sin x - 2 = 0$ أو $\sin x + 2 = 0$

يعني : $\sin x = 2$ أو $\sin x = -2$ و هذا غير ممكن في الحالتين لأننا نعلم أن : $-1 \le \sin x \le 1$

بالتالي : $S = ¤$

لدينا : $3\tan^2(x) - 1 = 0$ يعني : $(\sqrt{3}\tan x - 1)(\sqrt{3}\tan x + 1) = 0$

يعني $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ أو $\tan x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

يعني $\tan x = \tan\left(\frac{®}{6}\right)$ أو $\tan x = \tan\left(-\frac{®}{6}\right)$ يعني : $x = \frac{®}{6} + k® / k \in Z$ أو $x = -\frac{®}{6} + k® / k \in Z$

بالتالي : $S = \left\{\frac{®}{6} + k® / k \in Z\right\} \cup \left\{-\frac{®}{6} + k® / k \in Z\right\}$

لدينا : $4\cos^2 x - 1 = 0$ يعني : $(\sqrt{2}\cos x - 1)(\sqrt{2}\cos x + 1) = 0$

يعني : $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $\cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ يعني : $\cos x = \cos\left(\frac{®}{4}\right)$ أو $\cos x = \cos\left(\frac{3®}{4}\right)$

يعني :

$x = \frac{®}{4} + 2k® / k \in Z$ أو $x = -\frac{®}{4} + 2k® / k \in Z$ أو $x = \frac{3®}{4} + 2k® / k \in Z$ أو $x = -\frac{3®}{4} + 2k® / k \in Z$

بالتالي : $S = \left\{\frac{®}{4} + 2k® / k \in Z\right\} \cup \left\{-\frac{®}{4} + 2k® / k \in Z\right\} \cup \left\{\frac{3®}{4} + 2k® / k \in Z\right\} \cup \left\{-\frac{3®}{4} + 2k® / k \in Z\right\}$