أكاديمية الجهة الشرقية

مستوى الجدع مشترك أدبي
تمارين بحلول: المعادلات و المتراجحات والنظمات

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $-2x+22=0$ 2) $3(2x+5)=6x-1$

3) $9x^2-16=0$ 4) $4(x-2)=6x-2(x+4)$

5) $(2x+3)(9x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$

6) $\frac{2x+2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5x-2}{2}+\frac{1}{3}$

7) $x^3-x=0$

الأجوبة: 1) $-2x+22=0$ يعني $-2x+22-22=-22$

يعني $-2x=-22$

يعني $-2x\times\left(\frac{1}{-2}\right)=-22\times\left(\frac{1}{-2}\right)$

يعني $x=11$ ومنه: $S=\{11\}$ وتسمى مجموعة حلول المعادلة

2) $3(2x+5)=6x-1$ **يعني** $6x+15=6x-1$

يعني $6x-6x=-1-15$ **يعني** $0x=-16$ **يعني** $0=-16$

وهذا غير ممكن ومنه : $S=\varnothing$

3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$ **يعني** $4x-8=6x-2x-8$

يعني $4x-4x+8-8=0$ **يعني** $0=0$

ومنه :كل عدد حقيقي هو حل لهذه المعادلة وبالتالي : $S=\mathbb{R}$

4)أمامنا معادلة من الدرجة الثانية

طريقة 1: (التعميل) $9x^2-16=0$ **يعني** $(3x)^2-4^2=0$

يعني $(3x-4)(3x+4)=0$ **يعني** $3x+4=0$ أو $3x-4=0$

يعني $3x=-4$ أو $3x=4$ **يعني** $x=\frac{-4}{3}$ أو $x=\frac{4}{3}$

ومنه : $S=\left\{-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right\}$

طريقة 2: $9x^2-16=0$ **يعني** $9x^2=16$ **يعني** $x^2=\frac{16}{9}$

يعني $x=\sqrt{\frac{16}{9}}$ أو $x=-\sqrt{\frac{16}{9}}$ **يعني** $x=\frac{4}{3}$ أو $x=-\frac{4}{3}$

5) $(2x+3)(9x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$

يعني $x-\frac{1}{2}=0$ أو $9x-3=0$ أو $2x+3=0$

يعني $x=\frac{1}{2}$ أو $x=\frac{1}{3}$ أو $x=-\frac{1}{3}$

منه: $S=\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$

6) $\frac{2x+2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5x-2}{2}+\frac{1}{3}$ (نوحد المقامات)

يعني $\frac{4x+4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{15x-6}{6}+\frac{2}{6}$

يعني $\frac{4x+4-3}{6}=\frac{15x-6+2}{6}$

يعني $\frac{4x+1}{6}=\frac{15x-4}{6}$ **يعني** $4x+1=15x-4$

يعني $-11x=-5$ **يعني** $x=\frac{5}{11}$ ومنه: $S=\left\{\frac{5}{11}\right\}$

7) $x^3-x=0$ **يعني** $x\left(x^2-1\right)=0$ (التعميل)

يعني $x=0$ أو $x^2-1=0$ **يعني** $x=0$ أو $x^2=1$

يعني $x=0$ أو $x=\sqrt{1}$ أو $x=-\sqrt{1}$ ومنه: $S=\{-1,0,1\}$

تمرين2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $\frac{x+1}{2}+4=\frac{2x-5}{10}+\frac{2(x+10)}{5}$

2) $x^3-4x=0$

3) $(5x-7)(3x-10)=0$

الجواب: 1) $\frac{x+1}{2}+4=\frac{2x-5}{10}+\frac{2(x+10)}{5}$ (نوحد المقامات)

يعني $\frac{5x+5}{10}+\frac{40}{10}=\frac{2x-5}{10}+\frac{4x+40}{10}$

يعني $\frac{5x+5+40}{10}=\frac{2x-5+4x+40}{10}$

يعني $5x+5+40=2x-5+4x+40$ **يعني** $-x=-10$

يعني $x=10$ ومنه: $S=\{10\}$

2) $x^3-4x=0$ **يعني** $x\left(x^2-4\right)=0$ (التعميل)

يعني $x=0$ أو $x^2-4=0$ **يعني** $x=0$ أو $x^2=4$

يعني $x=0$ أو $x=\sqrt{4}$ أو $x=-\sqrt{4}$ ومنه: $S=\{-2,0,2\}$

3) $(5x-7)(3x-10)=0$ **يعني** $5x-7=0$ أو $3x-10=0$

يعني $x=\frac{7}{5}$ أو $x=\frac{10}{3}$ ومنه: $S=\left\{\frac{7}{5},\frac{10}{3}\right\}$

تمرين3: **هل** العدد 1- حل للمعادلة $3x^2+5x+2=0$ ؟

الجواب : **نعم** العدد 1- حل للمعادلة $3x^2+5x+2=0$

لأن: $3(-1)^2+5(-1)+2=0$

تمرين4: **هل** العدد $\sqrt{3}$ حل

للمعادلة $x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}=0$ ؟

الجواب : **نعم** العدد $\sqrt{3}$ حل

للمعادلة $x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}=0$

لأن: $\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)\sqrt{3}-\sqrt{3}=3+\sqrt{3}-3-\sqrt{3}=0$

تمرين5: أحسب مميز المعادلة $(E):3x^2-5x+7=0$

لدينا: $a=3$ و $b=-5$ و $c=7$ بما أن: $\Delta=b^2-4ac$

الجواب : $\Delta=(-5)^2-4\times7\times3=25-84=-59$

ملاحظة : الرمز Δ يقرأ: دلتا delta.

تمرين6: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $3x^2+x+2=0$

2) $x^2-10x+25=0$

3) $x^2-3x+2=0$

الأجوبة :1) المعادلة $3x^2+x+2=0$ ليس لها حلا في $\mathbb{R}$ لأن $\Delta\prec0$ $(\Delta=1-4\times3\times2=-23)$ و بالتالي مجموعة حلولها هي $S=\phi$.

2) المعادلة $x^2-10x+25=0$ لها حل وحيد مزدوج لأن $\Delta=0$ $(\Delta=10^2-4\times25=0)$.

حل هذه المعادلة هو: $x=\frac{-b}{2a}=5$

و بالتالي مجموعة حلولها هي $S=\{5\}$.

3) $x^2-3x+2=0$

لدينا $\Delta=9-4\times2=1$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{3-1}{2}=1$ و $x_2=\frac{3+1}{2}=2$ و منه $S=\{1;2\}$.

تمرين7: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $6x^2-7x-5=0$ 2) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ $\Delta\succ0$ $\Delta=0$

3) $3x^2+x+2=0$ 4) $4x^2-8x+3=0$ $\Delta\prec0$

5) $x^2-4x+2=0$ 6) $x^2+5x+7=0$

7) $2x^2-4x+6=0$ 8) $x^2-4x-21=0$

9) $3x^2-6x+3=0$

الأجوبة: $6x^2-7x-5=0$ $a=6$ و $b=-7$ و $c=-5$

$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times6\times(-5)=49+120=169=(13)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ **و** $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(-7)+\sqrt{169}}{2\times6}=\frac{7+13}{12}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$

$x_2=\frac{7-13}{12}=\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}$ ومنه: $S=\left\{\frac{5}{3},-\frac{1}{2}\right\}$

2) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ $a=2$ و $b=-2\sqrt{2}$ و $c=1$

$\Delta=b^2-4ac=\left(-2\sqrt{2}\right)^2-4\times2\times1=8-8=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه المعادلة تقبل **حلا وجيدا هو:**

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-\left(-2\sqrt{2}\right)}{2\times2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه: $S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

3) $3x^2+x+2=0$ $a=3$ و $b=1$ و $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times3\times2=1-24=-23<0$

بما أن $\Delta\prec0$ **فان المعادلة ليس لها حل في** $\mathbb{R}$ ومنه: $S=\varnothing$

4) $4x^2-8x+3=0$ $a=4$ و $b=-8$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times3\times(4)=84-8=16=(4)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-(-8)+\sqrt{16}}{2\times4}$ **و** $x_2=\frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2\times4}$

$x_1=\frac{8+4}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ **و** $x_2=\frac{8-4}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ ومنه: $S=\left\{\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\}$

5) $x^2-4x+2=0$ $a=1$ و $b=-4$ و $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times(1)=16-8=8>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{8}}{2\times1}$ **و** $x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{8}}{2\times1}$

$x_1=\frac{4+2\sqrt{2}}{2}=\frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}=2+\sqrt{2}$

$x_2=\frac{4-2\sqrt{2}}{2}=\frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}=2-\sqrt{2}$ ومنه: $S=\left\{2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right\}$

6) $x^2+5x+7=0$ $a=1$ و $b=5$ و $c=7$

$\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times1\times7=25-28=-3<0$

بما أن $\Delta\prec0$ **فان المعادلة ليس لها حل في** $\mathbb{R}$ ومنه: $S=\varnothing$

7) $2x^2-4x+6=0$ $a=2$ و $b=-4$ و $c=6$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times6=16-48=-32<0$

بما أن $\Delta\prec0$ **فان المعادلة ليس لها حل في** $\mathbb{R}$ ومنه: $S=\varnothing$

8) $x^2-4x-21=0$ $a=1$ و $b=-4$ و $c=-21$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times(-21)=16+84=100=(10)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{100}}{2\times1}$ **و** $x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{100}}{2\times1}$

$x_1=\frac{4+10}{2}=\frac{14}{2}=7$ **و** $x_2=\frac{4-10}{2}=\frac{-6}{2}=-3$ ومنه: $S=\{-3,7\}$

9) $3x^2-6x+3=0$ $a=3$ و $b=-6$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times3\times3=36-36=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا مزدوجا هو :

$x=\frac{-b}{2a}$ يعني $x=\frac{-(-6)}{2\times3}=\frac{6}{6}=1$ ومنه: $S=\{1\}$

تمرين8: عمل ثلاثيات الحدود التالية :

1) $x^2-10x+25$ 2) x^2-3x+2 3) $3x^2+x+2$

أجوبة : 1) $x^2-10x+25$ **:** $a=1$ و $b=-10$ و $c=25$

$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4\times1\times(25)=100-100=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد **هو:**

$x_1=\frac{-(-10)}{2\times1}=\frac{10}{2}=5$

ومنه التعميل **:** $x^2-10x+25=a\left(x-x_1\right)^2=1(x-5)^2$

2) x^2-3x+2 $a=1$ و $b=-3$ و $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times2=9-8=1=(1)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_1=\frac{3+\sqrt{1}}{2\times1}$ **و** $x_2=\frac{3-\sqrt{1}}{2\times1}$ يعني $x_1=2$ **و** $x_2=1$

ومنه التعميل :

$x^2-3x-2=a(x-x_1)(x-x_2)=1(x-2)(x-1)$

3) $3x^2+x+2$ لدينا:

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times3\times2=1-24=-23<0$

ومنه فان هذه الحدودية لا يمكن تعميلها

تمرين9: عمل ثلاثيات الحدود التالية :

1) $2x^2-4x+6$ 2) $4x^2-8x+3$ 3) $3x^2-6x+3$

أجوبة : 1) $2x^2-4x+6=0$: $a=2$ و $b=-4$ و $c=6$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times(6)=16-48=-32<0$

ومنه فان هذه الحدودية لا يمكن تعميلها

2) $4x^2-8x+3=0$ $a=4$ و $b=-8$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times4\times3=64-48=16=(4)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_1=\frac{8+4}{2\times4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ **و** $x_2=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

ومنه التعميل :

$4x^2-8x+3=4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(4x-2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$

3) $3x^2-6x+3$ بما أن $\Delta=0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد هو: $x_1=\frac{-(-8)}{2\times4}=1$

ومنه التعميل : $3x^2-6x+3=a\left(x-x_1\right)^2=3\left(x-1\right)^2$

تمرين10: حدد إشارة $2x+1$

الجواب : $2x+1=0$ يكافئ $x=-\frac{1}{2}$

و بما أن $a=2$ و $a\succ0$ جدول إشارة $2x+1$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$

تمرين11: حدد إشارة $-x+2$

الجواب :

$-x+2=0$ يكافئ $x=2$

و بما أن: $a=-1$ و $a\prec0$ فان جدول إشارة $-x+2$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x+2$	$+$	0	$-$

تمرين12: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية : $3x+6\geq0$

الجواب : $3x+6=0$ يكافئ $x=-2$

و بما أن: $a=3>0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$3x+6$	$-$	0	$+$

و منه فان : $S=[-2;+\infty[$

تمرين13: حدد إشارة: $-3x+9$

وحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $-3x+9\prec0$

الجواب : $-3x+9=0$ يكافئ $x=3$

و بما أن: $a=-3<0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-3x+9$	$+$	0	$-$

و منه فان : $S=]-\infty;3]$

تمرين14: حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المتراجحات التالية:

1) $-2x+12>0$ 2) $5x-15\leq0$

أجوبة :1) $-2x+12>0$ $-2x+12=0$ يكافئ $x=6$

و بما أن: $a=-2$ و $a<0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-2x+12$	$+$	0	$-$

و منه فان : $S=]-\infty;6[$

2) $5x-15\leq0$ $5x-15=0$ يكافئ $x=3$

و بما أن: $a=5$ و $a>0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$5x-15=0$	$-$	0	$+$

و منه فان : $S=]-\infty;3]$

تمرين15: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $4x^2-9\geq0$ 2) $(1-x)(2x+4)>0$

أجوبة : 1) $4x^2-9\geq0$

$4x^2-9=0$ **يعني** $(2x)^2-3^2=0$ **يعني** $(2x-3)(2x+3)=0$

يعني $2x+3=0$ أو $2x-3=0$ **يعني** $x=\frac{-3}{2}$ أو $x=\frac{3}{2}$

الطريقة : في جدول نعطي إشارة كل عامل على الشكل $ax+b$ ثم استنتج إشارة الجداء أو الخارج مع ترتيب تزايدي للقيم التي ينعدم فيها كل عامل.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x+3$	$-$	0 $+$		$+$
$2x-3$	$-$	$-$	0	$+$
$(2x-3)(2x+3)$	$+$	0	$-$ 0	$+$

و منه فان : $S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

2) $(1-x)(2x+4)>0$

$(1-x)(2x+4)=0$ **يعني** $2x+4=0$ أو $1-x=0$ **يعني** $x=-2$ أو $x=1$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$2x+4$	$-$	0 $+$		$+$
$1-x$	$+$	$+$	0	$-$
$(1-x)(2x+4)$	$-$	0 $+$	0	$-$

و منه فان : $S=]-2;1[$

تمرين16: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $9x^2-25\prec0$

الجواب: $9x^2-25=0$ **يعني** $(3x)^2-5^2=0$ **يعني**

$(3x-5)(3x+5)=0$

يعني $3x+5=0$ أو $3x-5=0$ **يعني** $x=\frac{-5}{3}$ أو $x=\frac{5}{3}$

الطريقة : في جدول نعطي إشارة كل عامل على الشكل $ax+b$ ثم استنتج إشارة الجداء أو الخارج مع ترتيب تزايدي للقيم التي ينعدم فيها كل عامل.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x-3)(2x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه فان : $S=\left]-\infty;-\frac{5}{3}\right]\cup\left[\frac{5}{3};+\infty\right[$

تمرين17:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x)=2x^2-3x+1$
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $2x^2-3x+1\geq 0$

أجوبة : 1) $a=2$ $P(x)=2x^2-3x+1$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{3+1}{4}=1$ **و** $x_1=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$ ومنه:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2)حل المتراجحة : $S=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

تمرين18:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x)=-2x^2+4x-2$
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $-2x^2+4x-2>0$

أجوبة : 1) $a=-2$ $P(x)=-2x^2+4x-2$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times(-2)\times(-2)=16-16=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد **هو:** $x_1=\frac{-(4)}{2\times(-2)}=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$P(x)=-2x^2+4x-2$		$-$	0	$-$	

2)حل المتراجحة : $S=\mathbb{R}$

تمرين19:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x)=3x^2+6x+5$
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $3x^2+6x+5<0$

أجوبة : 1) $a=3>0$ $P(x)=3x^2+6x+5$ ومنه:

$\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4\times3\times5=36-60=-24<0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)=3x^2+6x+5$	$+$	

2)**حل** المتراجحة : $S=\varnothing$

تمرين20:حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $2x^2-4x+6\geq 0$ 2) $4x^2-8x+3\leq 0$ 3) $x^2-3x-10<0$

أجوبة : 1) $a=3>0$ $2x^2-4x+6\geq 0$

$\Delta=b^2-4ac=16-48=-32<0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)=3x^2-4x+6$	$+$	

ومنه: $S=\mathbb{R}$

2) $a=4$ $4x^2-8x+3\leq 0$

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times4\times3=64-48=16>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{8+4}{2\times4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ **و** $x_2=\frac{8-4}{8}=\frac{1}{2}$ ومنه:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x^2-8x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

3) $a=4$ $x^2-3x-10<0$

$\Delta=b^2-4ac=49>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=5$ **و** $x_2=-2$ ومنه:

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$x^2-3x-10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=]-2,5[$

تمرين21: $\mathbb{R}^2$ هي مجموعة الأزواج (x,y) حيث $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$.

نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $2x+3y=2$

1) تأكد أن الزوج $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة: $2x+3y=2$

2) اعط ثلاث أزواج حلول للمعادلة: $2x+3y=2$

3) حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $2x+3y=2$

أجوبة : 1) $2\times0+3\times\frac{2}{3}=2$ اذن : $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة

2) $x=2$ اذن : $2\times2+3\times y=2$ يعني : $y=-\frac{2}{3}$ اذن : $\left(2,-\frac{2}{3}\right)\in S$

$x=3$ اذن : $2\times3+3\times y=2$ يعني : $y=-\frac{4}{3}$ اذن : $\left(3,-\frac{4}{3}\right)\in S$

$x=4$ اذن : $2\times4+3\times y=2$ يعني : $y=-2$ اذن : $(4,-2)\in S$

3) $2x+3y=2$ يعني $3y=-2x+2$ يعني $y=\frac{-2x+2}{3}$

يعني $y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$ اذن : $S=\left\{\left(x;-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}\right)/x\in\mathbb{R}\right\}$

تمرين22:حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلات التالية :

1) $2x-8y+10=0$ 2) $-3x+12y-2=0$

3) $7x-14y+1=0$

أجوبة : 1) $2x-8y+10=0$ يعني $2y=8x-10$ يعني $y=\frac{8x-10}{2}$

يعني $y=4x-5$ اذن : $S=\{(x;4x-5)/x\in\mathbb{R}\}$

2) $-3x+12y-2=0$ يعني $12y=3x+2$ يعني $y=\frac{3x+2}{12}$

يعني $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}$ اذن : $S=\left\{\left(x;\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}\right)/x\in\mathbb{R}\right\}$

3) $7x-14y+1=0$ يعني $7x=14y-1$ يعني $x=\frac{14y-1}{7}$

يعني $x=2y-\frac{1}{7}$ اذن : $S=\left\{\left(2y-\frac{1}{7};y\right)/y\in\mathbb{R}\right\}$

تمرين23: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية: $\begin{cases}4x+y=10\\-5x+2y=-19\end{cases}$

باستعمال طريقة التعويض

الجواب :نبحث عن y في المعادلة الأولى مثلا

$4x+y=10$ يعني $y=10-4x$

ونعوض y بقيمتها في المعادلة الثانية

$-5x+2y=-19$ يعني $-5x+2(10-4x)=-19$

يعني $20-8x-5x=-19$ يعني $-13x=-39$ يعني $x=3$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $y=10-4x$ فنجد $y=-2$

و منه: $S=\{(3,-2)\}$

تمرين24: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية: $\begin{cases}4x+y=10\\-5x+2y=-19\end{cases}$

باستعمال طريقة التأليفة الخطية

الجواب :الجواب :نضرب المعادلة الأولى في العدد (-2) فنحصل على :

$\begin{cases}-8x-2y=-20\\-5x+2y=-19\end{cases}$ وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:

$-8x-2y-5x+2y=-20-19$ يعني $-13x=-39$ يعني $x=3$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $4x+y=10$ فنجد $y=-2$

و منه: $S=\{(3,-2)\}$

تمرين25: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية :

1) $\begin{cases}x+2y=4\\-x+4y=2\end{cases}$

باستعمال طريقة المحددة

الجواب : طريقة المحددة:

محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix}1&2\\-1&4\end{vmatrix}=6\neq0$ و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:

هو $x=\frac{\begin{vmatrix}4&2\\2&4\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{12}{6}=2$ و $y=\frac{\begin{vmatrix}1&4\\-1&2\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{6}{6}=1$ و منه: $S=\{(2,1)\}$

تمرين26:حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمات التالية :

1) $\begin{cases}2x-y=-1\\3x+2y=9\end{cases}$

2) $\begin{cases}x-2y=-4\\-2x+3y=5\end{cases}$ 3) $\begin{cases}-7x-3y=4\\4x+5y=-2\end{cases}$

أجوبة :

1) $\begin{cases}2x-y=-1\\3x+2y=9\end{cases}$ نبحث عن y في المعادلة الأولى مثلا

$2x-y=-1$ يعني $y=2x+1$

ونعوض y بقيمتها في المعادلة الثانية

$3x+2(2x+1)=9$ يعني $-5x+2y=-19$

يعني $7x+2=9$ يعني $7x=7$ يعني $x=1$

ونعوض x ب 1 في المعادلة $y=2x+1$ فنجد $y=3$

و منه: $S=\{(1,3)\}$

2) $\begin{cases}x-2y=-4\\-2x+3y=5\end{cases}$

نضرب المعادلة الأولى في العدد (2) فنحصل على :

$\begin{cases}2x-4y=-8\\-2x+3y=5\end{cases}$ وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:

$2x-4y-2x+3y=-8+5$ يعني $-y=-3$ يعني $y=3$

ونعوض y ب 3 في المعادلة $x-2y=-4$ فنجد $x=2$

و منه: $S=\{(2,3)\}$

3) محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix}-7&-3\\4&5\end{vmatrix}=-35+12=-23\neq0$

و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:

هو $x=\frac{\begin{vmatrix}4&-3\\-2&5\end{vmatrix}}{\Delta}=-\frac{14}{23}$ و $y=\frac{\begin{vmatrix}-7&4\\4&-2\end{vmatrix}}{\Delta}=-\frac{2}{23}$ و نه: $S=\left\{\left(-\frac{14}{23},-\frac{2}{23}\right)\right\}$

تمرين27:باستعمال طريقة مناسبة

حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمات التالية :

1) $\begin{cases}x-2y=1\\-2x+4y=-2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x-4y=2\\-x+\frac{4}{3}y=-\frac{1}{3}\end{cases}$

3) $\begin{cases}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)x+\left(\sqrt{2}-1\right)y=0\\\left(\sqrt{2}+1\right)x+\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)y=1\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+y=11\\x^2-y^2=44\end{cases}$

أجوبة :1)محددة النظمة هي: $\Delta=\begin{vmatrix}1&-2\\-2&4\end{vmatrix}=0$

$\begin{cases}x-2y=1\\-2x+4y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=1\\-2(x-2y)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=1\\x-2y=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow x-2y=1\Leftrightarrow-2y=1-x\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x$

ومنه النظمة (S) لها عدد لا منته من الحلولاذن :

$S=\left\{\left(x;\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)/x\in\mathbb{R}\right\}$

2) $\begin{cases}3x-4y=2\\-x+\frac{4}{3}y=-\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-4y=2\\3x-4y=1\end{cases}$ بضرب المعادلة الثانية في 3-

وهذا غير ممكن ومنه $S=\varnothing$

3) $\begin{cases}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)x+\left(\sqrt{2}-1\right)y=0\\\left(\sqrt{2}+1\right)x+\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)y=1\end{cases}$

محددة النظمة هي:

$\Delta=\begin{vmatrix}\sqrt{5}-\sqrt{3}&\sqrt{2}-1\\\sqrt{2}+1&\sqrt{5}+\sqrt{3}\end{vmatrix}=\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$

$\Delta=\left(\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)-\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-(1)^2\right)$ اذن $\Delta=(5-3)-(2-1)=1\neq 0$

و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:

هو $x=\dfrac{\begin{vmatrix}0 & \sqrt{2}-1\\ 1 & \sqrt{5}+\sqrt{3}\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{-\left(\sqrt{2}-1\right)}{1}=-\sqrt{2}+1=1-\sqrt{2}$

و $y=\dfrac{\begin{vmatrix}\sqrt{5}-\sqrt{3} & 0\\ \sqrt{2}+1 & 1\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{-\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{1}=-\sqrt{5}+\sqrt{3}=\sqrt{3}-\sqrt{5}$

و منه: $S=\left\{\left(1-\sqrt{2},\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\right\}$

(4

$$\begin{cases}x+y=11\\(x+y)(x-y)=44\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=11\\x^2-y^2=44\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y=11\\x-y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=11\\11(x-y)=44\end{cases}\Leftrightarrow$$

وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:

$x+y+x-y=11+4$ يعني $2x=15$ يعني $x=\dfrac{15}{2}$

ونعوض x ب $\dfrac{15}{2}$ في المعادلة $x+y=11$ فنجد

$\dfrac{15}{2}+y=11$ أي $y=\dfrac{7}{2}$ و منه: $S=\left\{\left(\dfrac{15}{2},\dfrac{7}{2}\right)\right\}$

تمرين28: 1) حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية :

$$\begin{cases}-7x-3y=4\\4x+5y=-2\end{cases}$$

2) استنتج حلول النظمة التالية :

$$\begin{cases}\dfrac{-7}{x}-\dfrac{3}{y}=4\\\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=-2\end{cases}$$

أجوبة: 1) محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix}-7 & -3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-35+12=-23\neq 0$

و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:

هو $x=\dfrac{\begin{vmatrix}4 & -3\\ -2 & 5\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{14}{23}$ و $y=\dfrac{\begin{vmatrix}-7 & 4\\ 4 & -2\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{2}{23}$ ومنه: $S=\left\{\left(-\dfrac{14}{23},-\dfrac{2}{23}\right)\right\}$

2) لكي تكون للنظمة معنى يجب أن يكون لدينا : $x\neq 0$ و $y\neq 0$

نضع: $X=\dfrac{1}{x}$ و $Y=\dfrac{1}{y}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}-7\dfrac{1}{x}-3\dfrac{1}{y}=4\\4\dfrac{1}{x}+5\dfrac{1}{y}=-2\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{-7}{x}-\dfrac{3}{y}=4\\\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=-2\end{cases}$

$x\neq 0$ و $y\neq 0$ فنحصل على النظمة التالية : $\begin{cases}-7X-3Y=4\\4X+5Y=-2\end{cases}$

وسبق أن قمنا بحل هذه النظمة : $X=-\dfrac{14}{23}$ و $Y=-\dfrac{2}{23}$

و منه : $\dfrac{1}{x}=-\dfrac{14}{23}$ و $\dfrac{1}{y}=-\dfrac{2}{23}$ يعني: $x=-\dfrac{23}{14}$ و $y=-\dfrac{23}{2}$

و بالتالي: $S=\left\{\left(-\dfrac{23}{14},-\dfrac{23}{2}\right)\right\}$

تمرين29: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية :

$$\begin{cases}\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{3}{y-2}=4\\\dfrac{-2}{x-1}+\dfrac{1}{y-2}=1\end{cases}$$

أجوبة: نضع: $X=\dfrac{1}{x-1}$ و $Y=\dfrac{1}{y-2}$

$x\neq 1$ و $y\neq 1$

فنحصل على النظمة التالية : $\begin{cases}5X+3Y=4\\-2X+Y=1\end{cases}$

ونقوم بحل هذه النظمة ونجد : $X=\dfrac{1}{11}$ و $Y=\dfrac{13}{11}$

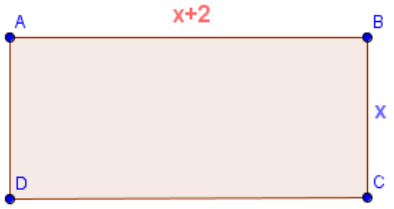
و منه : $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{11}$ و $\dfrac{1}{y-2}=\dfrac{13}{11}$

يعني: $x-1=11$ و $y-2=\dfrac{11}{13}$ يعني: $x=12$ و $y=\dfrac{37}{13}$

و بالتالي: $S=\left\{\left(12,\dfrac{37}{13}\right)\right\}$

تمرين30:أحسب طول عرض مستطيل اذا علمت أن طوله يزيد عن عرضه ب $2cm$ وأن مساحته تساوي $15cm^2$

الجواب



ليكن x وعرض مستطيل اذن طوله هو : $x+2$ ومنه مساحته هي :

$$S=x(x+2)=15$$

ومنه نحصل عن معادلة من الدرجة الثانية :

$x^2+2x-15=0$: $a=1$ و $c=-15$ و $b=2$

$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4\times1\times(-15)=64>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ **و** $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-2+8}{2\times1}=3$ **و** $x_2=\dfrac{-2-8}{2\times1}=-5<0$

ومنه:بما أن عرض مستطيل لا يمكن أن يكون سالبا :

نأخذ $x=3$

وبالتالي طوله هو : $5cm$

تمارين للبحث

تمرين 1 : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $2x^2-4x+6=0$ 2) $4x^2-8x+3=0$

3) $3x^2-6x+3=0$ 4) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

5) $x^2-4x+2=0$ 6) $x^2+5x+7=0$

تمرين 2 : 1)حل جبريا النظمة التالية : $\begin{cases} x+y=14 \\ 5x+3y=50 \end{cases}$.

2) ملأ شخص أربع عشرة قنينة بخمس لترات من عصير فواكه .
إذا علمت أن القنينات نوعان : قنينات سعة كـل واحدة منها 0,5 لترا و قنينات سعة كـل واحدة منها 0,3 لترا، حدد عدد القنينات من كـل نوع .

تمرين 3 :

1) حـل المعادلة : $(2x-3)(4-3x)=0$.

2) حـل المتراجحة : $5x-2<2(x+5)$.

3) اشترى شخص محسبة و كتابا بثمن 153 درهما.
إذا علمت أن نصف ثمن المحسبة ينقص بثمانية عشر درهما عن ثلثي ثمن الكتاب، أحسب ثمن المحسبة .

تمرين 4 :

1) حـل النظمة : $\begin{cases} x+y=20 \\ 2x+5y=61 \end{cases}$.

2) يتوفر أحمد على 61 درهما موزعة على 20 قطعة نقدية بعضها من فئة درهمين ، والبعض الآخر من فئة خمسة دراهم. أحسب عدد القطع النقدية من كـل فئة

تمرين 5 :

1) أ) حـل المعادلة التالية : $\frac{2x}{3}-\frac{5}{6}=x-\frac{3}{2}$.

ب)حـل المتراجحة التالية : $2-3x>x+7$.

2) أ) حـل النظمة : $\begin{cases} 3x+5y=72 \\ x+y=20 \end{cases}$.

ب) واجب زيارة أحد المتاحف هو 3 دراهم للأطفال و 5 دراهم للكبار.
أدى فوج من 20 زائر مبلغ 72 درهما لزيارة هذا المتحف.
حدد عدد الأطفال و عدد الكبار في هذا الفوج .

1) $\begin{cases} 2x-5y=-13 \\ 3x+2y=9 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=1 \\ -2x+4y=-2 \end{cases}$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien