

## الإسقاط

### القدرات المنتظرة

\*- الترجمة المتجهية لمبرهنة طاليس.

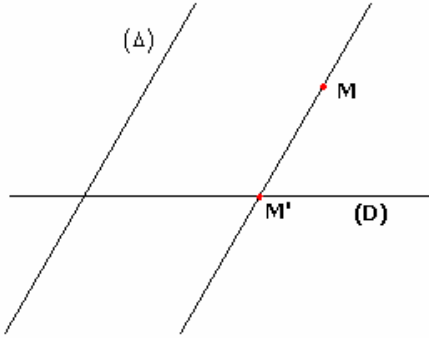
#### 1- مسقط نقطة على مستقيم

ليكن  $(D)$  و  $(\Delta)$  مستقيمين متقاطعين و  $M$  نقطة من المستقيم

يوجد مستقيم وحيد مار من  $M$  و يوازي  $(\Delta)$ .

هذا المستقيم يقطع  $(D)$  في نقطة وحيدة  $M'$

النقطة  $M'$  تسمى مسقط  $M$  على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$



#### تعريف

ليكن  $(D)$  و  $(\Delta)$  مستقيمين متقاطعين و  $M$  نقطة من المستوى

مسقط النقطة  $M$  على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$  هو نقطة تقاطع  $(D)$  مع المستقيم الموازي للمستقيم

$(\Delta)$  و المار من  $M$

**ملاحظة:** إذا كانت  $M \in (D)$  فإن مسقط  $M$  على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$  هو نفسها.

#### 2- الإسقاط على مستقيم بتواز مع آخر

##### أ- تعريف

$(D)$  و  $(D')$  مستقيمان متقاطعان

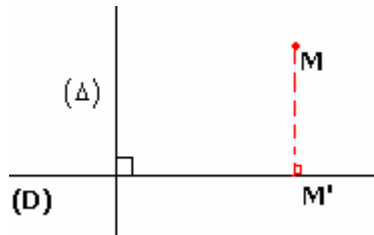
الطريقة التي تربط كل نقطة  $M$  من المستوى بمسقطها  $M'$  على المستقيم  $(D)$  بتواز مع

المستقيم  $(\Delta)$  تسمى الإسقاط على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$ .

##### ب- الإسقاط العمودي على مستقيم

##### تعريف 1

الإسقاط على مستقيم  $(D)$  بتواز مع مستقيم عمودي عليه يسمى الإسقاط العمودي على  $(D)$



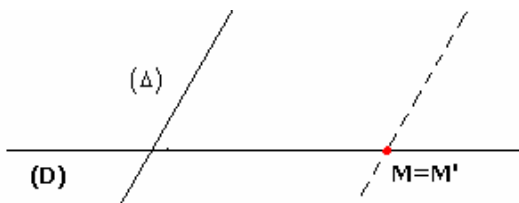
##### تعريف 2

مسقط النقطة  $M$  على المستقيم  $(D)$  بتواز مع مستقيم عمودي عليه يسمى المسقط العمودي

لنقطة  $M$  على  $(D)$

#### 3- خاصيات أولية

##### أ- خاصية 1



- كل نقطة من  $(D)$  منطبقة مع مسقطها على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$ .

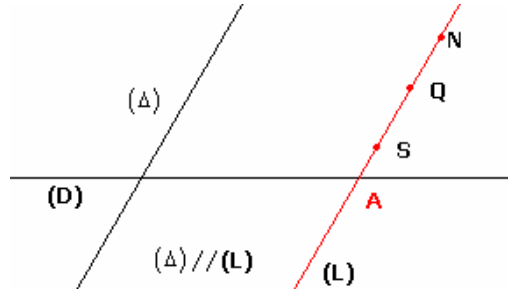
- كل نقطة منطبقة مع مسقطها على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$  تنتمي إلى  $(D)$

## مفردات

- إذا كان مسقط النقطة  $M$  هي نفسها على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$  نقول إن  $M$  صامدة بالإسقاط على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$ .
  - المستقيم  $(D)$  صامدة بالإسقاط على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$ .
- نمبر عن الخاصية 1 بالتعبير التالي:

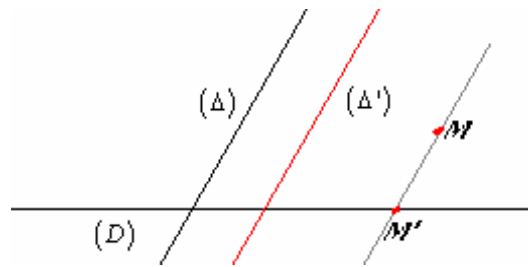
مجموعة النقط الصامدة بالإسقاط على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$  هي المستقيم  $(D)$

### ب- خاصية 2



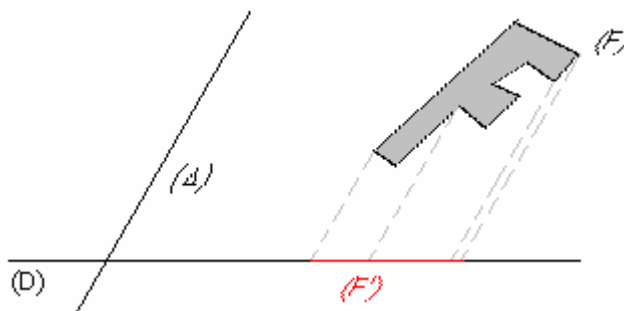
لتكن  $A$  نقط من مستقيم  $(D)$ .  
مجموعة النقط التي لها نفس المسقط  $A$  على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$  هي المستقيم المار من  $A$  و الموازي للمستقيم  $(\Delta)$

### ج- خاصية 3



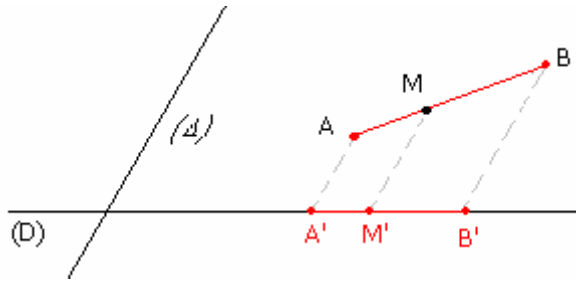
إذا كان مستقيم  $(\Delta')$  يوازي  $(\Delta)$  فإن الإسقاط على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$  هو الإسقاط على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta')$   
نقول إن الإسقاط على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$  لا يتغير بتعويض  $(\Delta)$  بمستقيم له نفس الاتجاه.

### 4- مسقط شكل



### أ- تعريف

- ليكن  $(D)$  و  $(\Delta)$  مستقيمين متقاطعين و  $(F)$  شكلا من المستوى و  $(F')$  جزء من المستقيم  $(D)$  نقول إن  $(F')$  مسقط الشكل  $(F)$  إذا وفقط إذا تحقق:
- مسقط كل نقطة من  $(F)$  على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$  ينتمي إلى  $(F')$ .
  - كل نقطة من  $(F')$  هي مسقط نقطة على الأقل من  $(F)$  على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$ .



**خاصية ( مقبولة )**

لتكن  $A$  و  $B$  نقطتين مختلفتين و  $A'$  و  $B'$  مسقطيهما على مستقيم  $(D)$  بتواز مع مستقيم  $(\Delta)$  بالتوالي. مسقط  $[AB]$  هو  $[A'B']$

**ملاحظة:**

إذا كان  $(AB) \parallel (\Delta)$  فإن  $A' = B'$  ومنه مسقط  $[AB]$  هي القطعة المنعدمة  $[A'A']$ .

**ج- مسقط منتصف قطعة  
خاصية**

إذا كان  $A'$  و  $B'$  مسقطي النقطتين  $A$  و  $B$  على مستقيم  $(D)$  بتواز مع مستقيم  $(\Delta)$  بالتوالي فإن: مسقط منتصف القطعة  $[AB]$  هو منتصف  $[A'B']$ .  
نبر عن هذا بقولنا: الإسقاط على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$  يحافظ على المنتصف.

**5- ميرهن طاليس المباشرة و العكسية متجهيا - الإسقاط ومعامل الاستقامية لمتجهتين  
أ- نشاط 1**

ليكن  $(D)$  و  $(\Delta)$  مستقيمين متقاطعين

$A ; B ; C ; D$  نقط من المستوى حيث  $A \neq B$ .

$A' ; B' ; C' ; D'$  مساقطها على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$ .

1- لنفترض أن  $A ; B ; C$  نقط مستقيمة حيث  $\vec{AC} = \lambda \vec{AB}$

بين أن  $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$  و أن  $\vec{A'C'} = \lambda \vec{A'B'}$

2- لنفترض أن  $\vec{AB} = \vec{CD}$  بين أن  $\vec{A'B'} = \vec{C'D'}$

3- لنفترض أن  $\vec{CD} = \alpha \vec{AB}$  بين أن  $\vec{C'D'} = \alpha \vec{A'B'}$

**تذكير لمبرهنة طاليس المباشرة في المثلث**

ليكن  $ABC$  مثلثا و  $M$  و  $N$  نقطتين من  $(AB)$

و  $(AC)$  على التوالي

إذا كان  $(BC) \parallel (MN')$  فإن  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

**تصحیح النشاط**

1- نبين أن  $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$  و  $\vec{A'C'} = \lambda \vec{A'B'}$

نعتبر المستقيم المار من  $A'$  و الموازي لـ  $(AB)$  ويقطع

$(BB')$  و  $(CC')$  على التوالي في  $E$  و  $F$

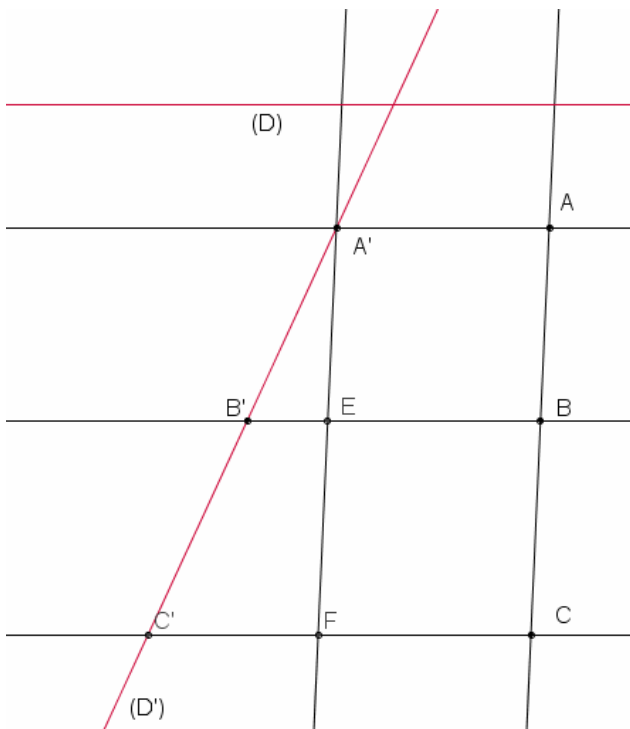
باعتبار المثلث  $A'BE$  و التوازي  $(BE)$  مع  $(CF)$

وتطبيق خاصية طاليس نحصل على  $\frac{A'F}{A'E} = \frac{A'C'}{A'B'}$

$ABEA'$  و  $ACFA'$  متوازي الأضلاع

و منه  $A'E = AB ; A'F = AC$

حسب طاليس فإن  $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$

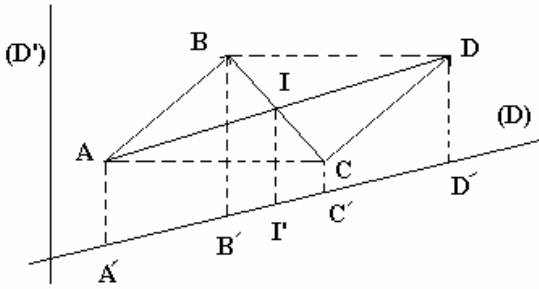


وحيث أن  $\overline{AC} = \lambda \overline{AB}$  فإن  $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} = |\lambda|$

ومنه  $A'C' = |\lambda| A'B'$

وحيث أن النقط  $A$  ;  $B$  ;  $C$  والنقط  $A'$  ;  $B'$  ;  $C'$  في نفس الترتيب و  $\overline{AC} = \lambda \overline{AB}$  فإن  $\overline{A'C'} = \lambda \overline{A'B'}$

2- نبين أن  $\overline{A'B'} = \overline{C'D'}$



$\overline{AB} = \overline{CD}$  تكافئ متوازي الأضلاع  $ABDC$  ليكن  $I$  مركز  $ABDC$  و  $I'$  مسقطها على  $(D)$  بتواز  $(D')$

لدينا  $\overline{IB} = -\overline{IC}$  ;  $\overline{IA} = -\overline{ID}$

ومنه حسب (1)  $\overline{I'B'} = -\overline{I'C'}$  ;  $\overline{I'A'} = -\overline{I'D'}$

إذن  $\overline{A'B'} = \overline{C'D'}$

3- نبين أن  $\overline{C'D'} = \alpha \overline{A'B'}$

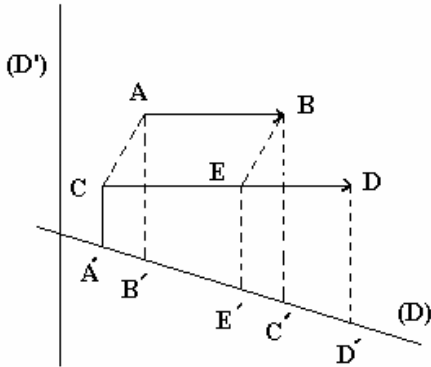
لدينا  $\overline{CD} = \alpha \overline{AB}$  نعتبر  $E$  حيث  $\overline{AB} = \overline{CE}$

ومنه  $\overline{CD} = \alpha \overline{CE}$

وبالتالي حسب (1) و(2) نستنتج  $\overline{A'B'} = \overline{C'E'}$

و  $\overline{C'D'} = \alpha \overline{C'E'}$

إذن  $\overline{C'D'} = \alpha \overline{A'B'}$



### ب- مبرهنة طاليس المباشرة متجهيا

ليكن  $(D)$  و  $(\Delta)$  مستقيمين متقاطعين و  $A$  ;  $B$  ;  $C$  نقط مستقيمة حيث  $A \neq B$  إذا كان  $A'$  ;  $B'$  ;  $C'$  مساقت  $A$  ;  $B$  ;  $C$  بالتوالي على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$  و كان

$$\overline{AC} = \lambda \overline{AB} \text{ فإن } \overline{A'C'} = \lambda \overline{A'B'}$$

### ج- الإسقاط و تساوي متجهتين

مبرهنة

$A$  ;  $B$  ;  $C$  ;  $D$  نقط من المستوى و  $A'$  ;  $B'$  ;  $C'$  ;  $D'$  مساقتها بالتوالي

$$\overline{CD} = \overline{AB} \text{ فإن } \overline{C'D'} = \overline{A'B'}$$

### د- الإسقاط ومعامل الاستقامة لمتجهتين

مبرهنة

$A$  ;  $B$  ;  $C$  ;  $D$  نقط من المستوى و  $A'$  ;  $B'$  ;  $C'$  ;  $D'$  مساقتها بالتوالي

على مستقيم  $(D)$  بتواز مع مستقيم  $(\Delta)$

$$\overline{CD} = \alpha \overline{AB} \text{ فإن } \overline{C'D'} = \alpha \overline{A'B'}$$

نعبر عن هذا بقولنا الإسقاط يحافظ على معامل استقامة متجهتين

### تمرين

ليكن  $ABC$  مثلثا و  $E$  و  $F$  نقطتين حيث  $\overline{AE} = \frac{1}{4} \overline{AB}$  ;  $\overline{AF} = \frac{1}{4} \overline{AC}$  نعتبر  $(\Delta)$  مستقيم يقطع

$(AC)$  و لا يوازي  $(BC)$  لتكن  $E'$  و  $F'$  و  $B'$  و  $C'$  المساقت العمودية بالتوالي  $E$  و  $F$  و  $B$  و  $C$  على

$(\Delta)$

$$\text{بين أن } \overline{E'F'} = \frac{1}{4} \overline{B'C'}$$

## تعريف

ليكن  $ABC$  مثلثا و  $I$  منتصف  $[BC]$  و  $E$  و  $F$  نقطتين حيث  $\overrightarrow{AE} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

نعتبر  $J$  تقاطع  $(AI)$  و  $(EF)$  و  $B'$  و  $C'$  مسقطا  $B$  و  $C$  على  $(AI)$  بتواز مع  $(EF)$

1- بين أن  $I$  منتصف  $[B'C']$

2- بين أن  $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC'}$  و  $\overrightarrow{AJ} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{AB'}$

3- بين أن  $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$  و استنتج  $\overrightarrow{AI}$  بدلالة  $\overrightarrow{AJ}$

## ذ- نتائج

### الإسقاط و المسافة نتيجة

ليكن  $(D)$  و  $(\Delta)$  مستقيمين متقاطعين و  $A$  ;  $B$  ;  $C$  نقط مستقيمة حيث  $A \neq B$  و  $(AB)$  لا يوازي  $(\Delta)$

إذا كان  $A'$  ;  $B'$  ;  $C'$  مساقط  $A$  ;  $B$  ;  $C$  بالتوالي على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$

$$\text{فان } \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$$

**ملاحظة** يمكن أن يكون  $AB \neq A'B'$  نعتبر عن هذا بقولنا الإسقاط لا يحافظ على المسافة

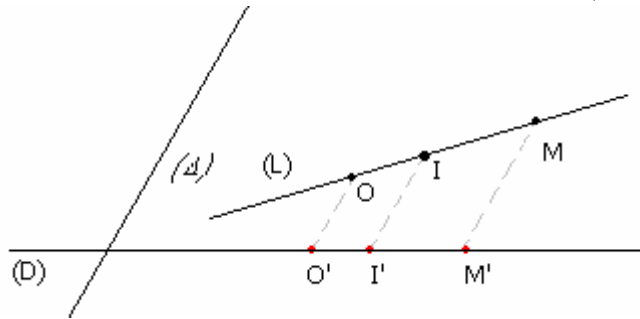
### الإسقاط و المحور نشاط

ليكن  $(D)$  و  $(\Delta)$  مستقيمين متقاطعين و  $L(O;I)$  محور حيث  $(L)$  و  $(\Delta)$  غير متوازيين

و  $O'$  و  $I'$  مسقطي  $O$  و  $I$  بالتوالي على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$

$x$  أفصول نقطة  $M$  في المحور  $L(O;I)$  و  $M'$  مسقطها على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$

حدد  $M'$  في المحور  $\Delta(O';I')$



## نتيجة

ليكن  $(D)$  و  $(\Delta)$  مستقيمين متقاطعين و  $L(O;I)$  محور حيث  $(L)$  و  $(\Delta)$  غير متوازيين

و  $O'$  و  $I'$  مسقطي  $O$  و  $I$  بالتوالي على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$  .

$M$  نقطة من  $(L)$  و  $M'$  مسقطها على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$  .

إذا كان  $x$  أفصول  $M$  في المحور  $L(O;I)$  فان  $x$  هو أفصول النقطة  $M'$  في المحور  $\Delta(O';I')$

### ر- مبرهنة طاليس العكسية متجهيا نشاط

ليكن  $(D)$  و  $(\Delta)$  مستقيمين متقاطعين و  $A$  ;  $B$  ;  $C$  نقط من مستقيم  $(L)$

حيث  $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$  و  $A'$  ;  $B'$  مسقطي  $A$  و  $B$  بالتوالي على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$

$$\text{و } \overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{A'B'}$$

لتكن  $C_1$  مسقط  $C$  على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$  .

بين أن  $C_1 = C'$

## المبرهنة العكسية

ليكن  $(D)$  و  $(\Delta)$  مستقيمين متقاطعين و  $A ; B ; C$  نقط مستقيمة حيث  $A \neq B$   
 إذا كان  $A' ; B' ; C'$  مسقطي  $A$  و  $B$  بالتوالي على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$  و كان  $\overline{AC} = \lambda \overline{AB}$  و  
 $\overline{A'C'} = \lambda \overline{A'B'}$  فإن  $C'$  مسقط  $C$  على  $(D')$  بتواز مع  $(\Delta)$

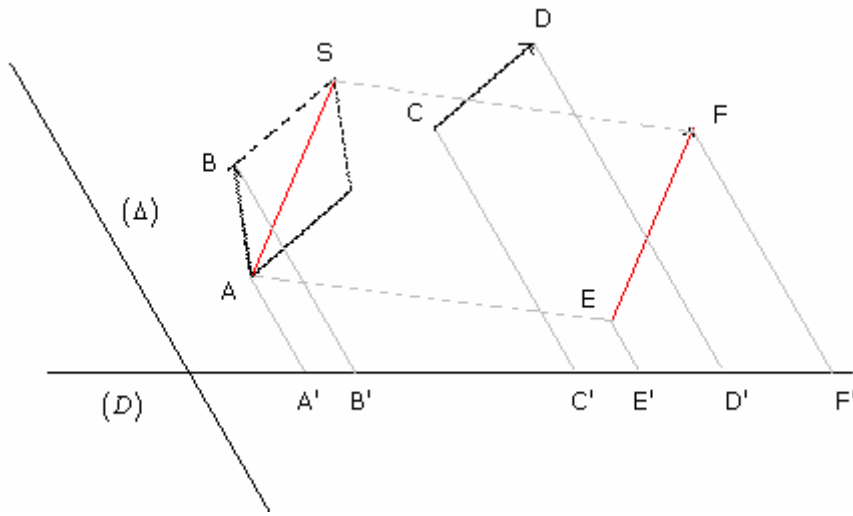
## 6- الإسقاط و مجموع متجهين نشاط

ليكن  $(D)$  و  $(\Delta)$  مستقيمين متقاطعين

نقط من المستوى  $F ; E ; D ; C ; B ; A$  حيث  $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{EF}$   
 $A' ; B' ; C' ; D' ; E' ; F'$  مساقطها على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$   
 لتكن  $S$  نقطة حيث  $\overline{CD} = \overline{BS}$  و  $S'$  مسقطها على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$

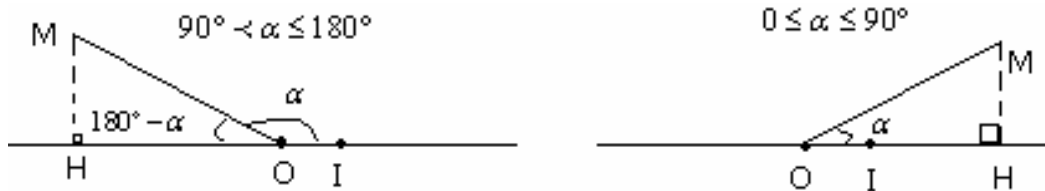
1- بين أن  $\overline{E'F'} = \overline{A'S'}$  و  $\overline{C'D'} = \overline{B'S'}$

2- استنتج أن  $\overline{A'B'} + \overline{C'D'} = \overline{E'F'}$



## مبرهنة

ليكن  $(D)$  و  $(\Delta)$  مستقيمين متقاطعين و  $A ; B ; C ; D ; E ; F$  نقط من  
 المستوى و  $A' ; B' ; C' ; D' ; E' ; F'$  مساقطها على  $(D)$  بتواز مع  $(\Delta)$   
 إذا كان  $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{EF}$  فإن  $\overline{A'B'} + \overline{C'D'} = \overline{E'F'}$   
**7- أفصول المسقط العمودي لنقطة على محور**



## خاصية

إذا كان  $H$  المسقط العمودي لنقطة  $M$  على المحور  $D(O;I)$  حيث  $(OI=1)$  و  $\alpha$  قياس الزاوية  
 $(\widehat{IOM})$  فإن أفصول  $H$  هو:

\*  $OM \cos \alpha$  إذا كان  $0 \leq \alpha < 90^\circ$

\*  $-OM \cos(180^\circ - \alpha)$  إذا كان  $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$

## تمارين

### تمرين 1

ليكن  $ABCD$  متوازي الأضلاع ( $\widehat{DAB}$ ) زاوية منفرجة) و  $E$  و  $F$  نقطتين

$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \quad \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{حيث}$$

ليكن  $K$  تقاطع  $(AC)$  و  $(EF)$ . نعتبر  $B'$  و  $D'$  مسقطا  $B$  و  $D$  على  $(AC)$  بتواز مع  $(EF)$

1- بين أن  $[AC]$  و  $[B'D']$  لهما نفس المنتصف

$$2- \text{ بين أن } \overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}' \quad \overrightarrow{AK} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}'$$

3- عبر عن  $\overrightarrow{AC}$  بدلالة  $\overrightarrow{AK}$

### تمرين 2

ليكن  $ABCD$  شبه منحرف قاعدتيه  $[AB]$  و  $[CD]$  حيث  $CD = 2AB$  و  $I$  تقاطع قطريه.

نعتبر  $E$  مسقط  $I$  على  $(CD)$  بتواز مع  $(BC)$  و  $F$  مسقط  $I$  على  $(CD)$  بتواز مع  $(AD)$

$$1- \text{ بين أن } \overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

2- بين أن  $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DF}$  استنتج أن  $[CD]$  و  $[EF]$  لهما نفس المنتصف

### تمرين 3

ليكن  $ABC$  مثلثا و  $M$  نقطة بحيث  $\overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$  و  $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ . نعتبر  $N$  مسقط  $M$  على

$(AC)$  بتواز مع  $(BC)$  و  $H$  المسقط العمودي للنقطة  $A$  على  $(BC)$ .

ليكن  $I$  تقاطع  $(MN)$  و  $(AH)$

$$1- \text{ بين أن } \overrightarrow{AI} = \alpha \cdot \overrightarrow{AH} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{MN} = \alpha \cdot \overrightarrow{BC}$$

2- بين أن  $\frac{S}{S'} = \alpha^2$  حيث  $S$  و  $S'$  مساحتا المثلثين  $ABC$  و  $AMN$  على التوالي