ملخص درس الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية

الحساب في IR .

1) قواعد الحساب في IR .

ليكن a و b و c و d من IR .

a) $a=b$ يكـــافئ $a+c=b+c$

b) $a=b$ يكـــافئ $a.c=b.c$ $\quad (c\neq 0)$

c) إذا كان $\begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases}$ و فـــإن $\begin{cases} a+c=b+d \\ a.c=b.d \end{cases}$

d) $a.b=0$ يكـــافئ $a=0$ أو $b=0$.

e) $a.b\neq 0$ يكـــافئ $a\neq 0$ و $b\neq 0$.

g) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ يكـــافئ $a.d=b.c$ $\quad (a\neq 0$ و $b\neq 0)$

h) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$ و $\dfrac{a}{b}.\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$

i) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}$ و $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}=\dfrac{a}{bc}$ و $\dfrac{1}{\frac{a}{b}}=\dfrac{b}{a}$

2) القوى في IR

a) تعريف

*) $a^0=1 \quad (a\neq 0)$ $\qquad$ *) $a^1=1$

*) $a^n=\underbrace{a.a.a.....a}_{n\,fois} \quad (n\in IN^*-\{1\})$

*) $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

b) خاصيـــــات

a) ليكن a و b من IR^* و m و n من $\mathbb{Z}$.

*) $a^m.a^n=a^{m+n}$ $\qquad$ *) $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

*) $(a^m)^n=a^{mn}$ $\qquad$ *) $(ab)^n=a^n b^n$

*) $\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ $\qquad$ *) $(\dfrac{a}{b})^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

b) إذا كان $a=b$ فإن $a^2=b^2$

c) $\boxed{\text{إذا كان } a^2=b^2 \text{ و } a \text{ و } b \text{ لهما نفس الإشارة فإن } a=b\ .}$

d) $a^2=b^2$ يكـــافئ $a=b$ أو $a=-b$.

ملاحظـــة

لكي نبين أن : $a=b$ يكفي مثلا أن نبي أن $a^2=b^2$ و a و b لهما نفس الإشارة

3) متطابقـــات هامة

a) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

b) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

c) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

d) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

e) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

f) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

g) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

4) الجذور المربعة .

تعريف ليكن $a\in IR^+$. الجذر المربع للعدد a هو العدد الموجب b الذي يحقق : $b^2=a$. ونكتب $\sqrt{a}=b$.

خاصيـــــات .

a) ليكن a و b من IR^+ .

*) $\sqrt{a}\geq 0$ $\qquad$ *) $\boxed{\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2=a}$

*) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ $\qquad$ *) $(\sqrt{a})^n=\sqrt{a^n}$

*) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

b) ليكن $x\in IR$. $\boxed{\sqrt{x^2}=|x|}$.

c) إذا كان $ab>0$ فإن : $\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$ و $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$

d) ليكن $a\in IR^+$ $\boxed{x^2=a \text{ يكـــافئ } x=\sqrt{a} \text{ أو } x=-\sqrt{a}\ .}$

5) التنـــــاسبية .

a) نقول إن العددين a و b متناسبان مع مع c و d إذا وفقط إذا كان :

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

b) إذا كان : $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$ فإن :

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n}{k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n}$$

6) الجزئ الصحيح .

a) تعريف : كل عدد حقيقي x محصور بين عددين نسبيين متتابعين k و $k+1$ يعني : $k\leq x<k+1$

العدد النسبي k يسمى الجزئ الصحيح للعدد x ونكتب $E(x)=k$ أو $[x]=k$

ملاحظة :

*) الجزئ الصحيح للعدد x هو العدد النسبي الذي يوجد مباشرة قبل x .

*) $E(x)\leq x<E(x)+1$ لكل x من IR .

II) الترتـــــيـــــب في IR .

1) خاصيـــات

a) *) $a\geq b$ يكـــافئ $a-b\geq 0$

*) $a\leq b$ يكـــافئ $a-b\leq 0$

b) *) $a>b$ يكـــافئ $a-b>0$

*) $a<b$ يكـــافئ $a-b<0$

c) *) $a\leq b$ يعني $a<b$ أو $a=b$.

*) إذا كان $a<b$ فإن $a\leq b$ والعكس غير صحيح .

d) *) $a\geq b$ يكـــافئ $a+c\geq b+c$

*) $a>b$ يكـــافئ $a+c>b+c$

e) *) إذا كان $\begin{cases} a\leq b \\ b\leq c \end{cases}$ و فإن $a\leq c$.

*) إذا كان $\begin{cases} a \le b \\ b < c \end{cases}$ و فإن $a < c$.

f) *) إذا كان و $\begin{cases} a \le b \\ c \le d \end{cases}$ فإن $a + c \le b + d$ والعكس غير صحيح .

*) إذا كان و $\begin{cases} a \le b \\ c < d \end{cases}$ فإن $a + c < b + d$

g) *) إذا كان و $\begin{cases} a \le b \\ c \ge 0 \end{cases}$ فإن $ac \le bc$

*) إذا كان و $\begin{cases} a \le b \\ c \le 0 \end{cases}$ فإن $ac \ge bc$.

f) *) إذا كان و $\begin{cases} 0 \le a \le b \\ 0 \le c \le d \end{cases}$ فإن $ac \le bd$ والعكس غير صحيح .

*) إذا كان و $\begin{cases} 0 \le a \le b \\ 0 < c < d \end{cases}$ فإن $ac < bd$

i) ليكن $a > 0$ و $b > 0$. *) $a \le b$ يكـــــافئ $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$

j) ليكن $a < 0$ و $b < 0$. *) $a \le b$ يكـــــافئ $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$

k) ليكن $a \ge 0$ و $b \ge 0$
*) $a \le b$ يكـــــافئ $a^2 \le b^2$
*) $a \le b$ يكـــــافئ $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$

l) ليكن $a \le 0$ و $b \le 0$ *) $a \le b$ يكـــــافئ $a^2 \ge b^2$

m) ليكن a و b من IR $|a| \le |b|$ يكـــــافئ $a^2 \le b^2$

n) إذا كان لـ a و b نفس الإشارة و $a + b = 0$ فإن $a = 0$ و $b = 0$

ملاحظة

إذا كان العددين a و b يحتويان على الجذور المربعة ، لكي نقارن a و b يكفي مثلا أن نقارن a^2 و b^2 ونتحقق من إشارة a و b ثم نستعمل الخاصيتين k) و l) .

2) القيـــــمة المطلقة .

تعريف :ليكن x من IR . القيمة المطلقة للعدد x هي العدد الذي نرمز له ب $|x|$ والمعرف بما يلي :

$$|x| = \begin{cases} x & ; \ x \ge 0 \\ -x & ; \ x \le 0 \end{cases}$$

يعني : *) إذا كان $x \ge 0$ فإن القيمة المطلقة للعدد x هي نفسه .
*) إذا كان $x \le 0$ فإن القيمة المطلقة للعدد x هي مقابله .

خاصيـــــات

a) *) $|-x| = |x|$ *) $|x| \ge 0$

*) $|xy| = |x||y|$ *) $|x^n| = |x|^n$ *) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

b) *) $|x| = r$ يكـــــافئ $x = r$ أو $x = -r$.
*) $|x| = |y|$ يكـــــافئ $x = y$ أو $x = -y$.

c) *) $|x| \le r$ يكـــــافئ $-r \le x \le r$
*) $|x| \ge r$ يكـــــافئ $x \ge r$ أو $x \le -r$

3) المجـــــالات

a) $[a,b] = \{x \in IR \ / \ a \le x \le b\}$

a) $[a,b[= \{x \in IR \ / \ a \le x < b\}$

a) $]a,b] = \{x \in IR \ / \ a < x \le b\}$

a) $]a,b[= \{x \in IR \ / \ a < x < b\}$

a) $[a,+\infty[= \{x \in IR \ / \ x \ge a\}$

a) $]a,+\infty[= \{x \in IR \ / \ x > a\}$

a) $]-\infty,a] = \{x \in IR \ / \ x \le a\}$

a) $]-\infty,a[= \{x \in IR \ / \ x < a\}$

4) التأطيـــــر

تعريف : كل متفاوتة من المتفاوتات : $a < x < b$ و $a \le x < b$ و $a < x \le b$ و $a \le x \le b$ تسمى تأطيرا للعدد x سعته $b - a$.

5) القيمة المقربـــــة .

a) i) إذا أردنا أن نبين أن x_0 قيمة مقربة بتفريط للعدد x بالدقة r ، نقوم بتأطير $x - x_0$ و سنجد $\boxed{0 \le x - x_0 \le r}$

ii) إذا أردنا أن نبين أن x_0 قيمة مقربة بإفراط للعدد x بالدقة r ، نقوم بتأطير $x - x_0$ و سنجد $\boxed{-r \le x - x_0 \le 0}$.

iii) إذا أردنا أن نبين أن x_0 قيمة مقربة للعدد x بالدقة r ، نقوم بتأطير $x - x_0$ و سنجد $\boxed{-r \le x - x_0 \le r}$
يعني $\boxed{|x - x_0| \le r}$.

b) إذا أردنا أن نحدد قيمة مقربة للعدد x نقوم بتأطير العدد x و سنجد $\boxed{a \le x \le b}$: ومن هنا نستنتج أن ما يلي :

i) a هي القيمة المقربة بتفريط للعدد x بالدقة $r = b - a$

ii) b هي القيمة المقربة بإفراط للعدد x بالدقة $r = b - a$

iii) $\frac{a+b}{2}$ هي القيمة المقربة للعدد x بالدقة $r = \frac{b-a}{2}$

c) ملاحظـــــة

يمكن تحديد قيمة مقربة للعدد x مباشرة إذا كانت لدينا إحدى التأطيرات التالية :

i) $\boxed{0 \le x - x_0 \le r}$ وستكون x_0 قيمة مقربة بتفريط للعدد x بالدقة r

ii) $\boxed{-r \le x - x_0 \le 0}$ وستكون x_0 قيمة مقربة بإفراط للعدد x بالدقة r

iii) $\boxed{-r \le x - x_0 \le r}$ أو $\boxed{|x - x_0| \le r}$
وستكون x_0 قيمة مقربة للعدد x بالدقة r

d) التقريب العشري .

ليكن x من IR .

i) العدد العشري $\frac{E(10^n x)}{10^n}$ يسمى القيمة العشرية المقربة بتفريط للعدد x بالدقة 10^{-n} .

i) العدد العشري $\frac{E(10^n x)}{10^n} + 1$ يسمى القيمة العشرية المقربة بإفراط للعدد x بالدقة 10^{-n} .