

ملخص درس الحسابيات في مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad (4) \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}; bc \neq 0 \quad (6) \quad \frac{a}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad (5)$$

$$a - b = a + (-b) \quad (8) \quad -a \text{ يسمى مقابل } a \quad (7)$$

$$-(a - b) = -a + b \quad (9)$$

$$\frac{1}{a} \text{ يسمى مقلوب العدد } a \text{ حيث } a \neq 0 \quad (10)$$

$$\text{العدد } \frac{a}{b} \text{ حيث } a \in \mathbb{R} \text{ و } b \in \mathbb{R}^* \text{ يسمى خارج العدد } a \text{ على } b. \quad (11)$$

$$a = bc \text{ يكافئ } \frac{a}{b} = c \quad (12) \quad \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

$$ad = bc \text{ يكافئ } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (13)$$

$$a = 0 \text{ يكافئ } \frac{a}{b} = 0 \quad (15) \quad \frac{a}{b} = 1 \text{ يكافئ } a = b \quad (14)$$

III. متطابقات هامة النشر والتعميل:

1) خاصيات لكل a و b من \mathbb{R}

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2) \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1)$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad (3)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad (4)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad (5)$$

a و b أعداد حقيقية

$$k(a - b) = ka - kb \quad k(a + b) = ka + kb \quad \blacksquare$$

$$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd \quad \blacksquare$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \blacksquare$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \blacksquare$$

2) النشر

$$\text{أمثلة: أنشر: } x \in \mathbb{R} \quad (\sqrt{2} - 3)^2, (2x + 1)^2, -2x(3x - 4)$$

$$(2x + 1)^3, (x - 1)^3, (3\sqrt{3} - 2)(3\sqrt{3} + 2), (3x - 2)(x + 3)$$

$$\text{الأجوبة: } (2x + 1)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$(\sqrt{2} - 3)^2 = (\sqrt{2})^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 3 + 3^2 = 2 - 6\sqrt{2} + 9 = 11 - 6\sqrt{2}$$

$$-2x(3x - 4) = -6x^2 + 8x$$

$$(3x - 2)(x + 3) = 3x^2 + 9x - 2x - 6 = 3x^2 + 7x - 6$$

$$(3\sqrt{3} - 2)(3\sqrt{3} + 2) = (3\sqrt{3})^2 - 2^2 = 27 - 4 = 23$$

$$(x - 1)^3 = (x)^3 - 3(x)^2 \times 1 + 3 \times x \times (1)^2 - (1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

I. مجموعات الأعداد

■ الأعداد الصحيحة الطبيعية تكون مجموعة نرمز لها بالرمز \mathbb{N} و نكتب: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$

■ الأعداد الصحيحة النسبية أي الأعداد الصحيحة الطبيعية و مقابلاتها تكون مجموعة نرمز لها بالرمز \mathbb{Z} و نكتب: $\mathbb{Z} = \{\dots -3; -2; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

■ الأعداد العشرية تكون مجموعة نرمز لها بالرمز D

■ الأعداد الجذرية أي الأعداد التي نكتب على الشكل $\frac{a}{b}$ حيث:

$a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{N}^*$ تكون مجموعة نرمز لها بالرمز \mathbb{Q} .

■ الأعداد الجذرية و اللاجذرية تكون مجموعة الأعداد الحقيقية و نرمز لها بالرمز \mathbb{R} .

استعمال الرموز: $\in; \notin; \subset; \supset$

1) العدد -7 هو عنصر من \mathbb{Z} نكتب $-7 \in \mathbb{Z}$ نقرأ: " -7 ينتمي الى \mathbb{Z} " في حين -7 لا ينتمي الى \mathbb{N} و نكتب $-7 \notin \mathbb{N}$ ولدنا $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$

2) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ لكن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ لأنه لا يمكن ايجاد عددين صحيحين a و b بحيث $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ و b غير منعدم.

3) كل عدد صحيح طبيعي هو عدد صحيح نسبي، نقول ان المجموعة \mathbb{N} توجد ضمن \mathbb{Z} و نكتب $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

4) ليس كل عدد عشري هو عدد صحيح نسبي، نقول ان المجموعة D ليست ضمن \mathbb{Z} و نكتب $D \not\subset \mathbb{Z}$.

لأن هناك عناصر من D لا تنتمي الى \mathbb{Z} . كذلك: كل عنصر من D هو عنصر من \mathbb{Q} : $D \subset \mathbb{Q}$.

5) كل عنصر من \mathbb{Q} هو عنصر من \mathbb{R} : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. لدينا اذن:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset D \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

II. العمليات في المجموعة \mathbb{R} وخاصياتها

1. العمليات في المجموعة \mathbb{R}

الجمع في \mathbb{R} : a و b و c أعداد حقيقية

$$a + b = b + a \quad (1)$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c \quad (2)$$

$$a + 0 = 0 + a = a \quad (3)$$

$$(-a) + a = a + (-a) = 0 \quad (4)$$

الضرب في \mathbb{R} : a و b و c أعداد حقيقية

$$a \times b = b \times a = ab = ba \quad .1$$

$$a(bc) = (ab)c = (ac)b = abc \quad .2$$

$$a \neq 0; a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = \frac{a}{a} = 1 \quad .3$$

العمليات على الكسور وخاصيات:

a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث $bd \neq 0$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad (2) \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b} \quad (1)$$

$$B = 10^{-8+9+7-4+2-3-5} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01$$

(2) الكتابة العلمية:

كل عدد عشري x موجب يكتب على الشكل $x = a \times 10^p$ حيث p ينتمي إلى \mathbb{Z} و a عدد عشري بحيث $1 \leq a < 10$. هذه الكتابة تسمى الكتابة العلمية.

ملحوظة: إذا كان x عددا سالبا فان كتابته العلمية هي

$$x = -a \times 10^p$$

أمثلة: (1) المسافة بين الأرض و الشمس هي: 149597870 كلم, تكتب $1,4959787 \times 10^8$ كلم.

(2) الكتابة العلمية للعدد: 149597870 كلم هي $1,4959787 \times 10^8$ كلم.

(3) $3,25 \times 10^4$ هي كتابة علمية

(4) الكتابة العلمية للعدد: -17000000 هي -1.7×10^7

V. الجذور المربعة:

تعريف: ليكن x عددا حقيقيا موجبا. نسمي جذر مربع x , العدد الحقيقي الموجب y .

بحيث $x = y^2$ و نكتب $y = \sqrt{x}$.

$y = \sqrt{x}$ يكافئ $x = y^2$ و $y \geq 0$.

أمثلة: $\sqrt{9} = 3$ و $\sqrt{81} = 9$

خاصية: لكل a و b من \mathbb{R}^+ لدينا:

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a \quad \text{و} \quad (\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}; n \in \mathbb{N}^* (1)$$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \text{و} \quad \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}; a > 0 \quad \text{و} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; b > 0$$

(2) إذا كان $x \geq 0$ و $y \geq 0$ فان $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ يكافئ $x = y$.

(3) $\sqrt{x} = 0$ إذا و فقط إذا كان $x = 0$.

VI. التناسبية

تعريف: a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث $bd \neq 0$ نقول إن الأعداد a و b و c و d تكون في هذا الترتيب تناسبا إذا

$$\text{و فقط إذا كان: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

مثال: حدد العدد الحقيقي x إذا علمت أن الأعداد: $x+1$ و 3 و x و 2 تكون في هذا الترتيب تناسبا

الجواب: $x+1$ و 3 و x و 2 تكون في هذا الترتيب تناسبا

$$\text{يعني } \frac{x+1}{3} = \frac{x}{2} \quad \text{يعني } 2(x+1) = 3x$$

$$\text{يعني } 2x+2 = 3x \quad \text{يعني } -x = -2 \quad \text{يعني } x = 2$$

$$(2x+1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \times 1 + 3 \times 2x \times (1)^2 + (1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

(3) التعميل

أمثلة: عمل التعابير التالية:

$$C = 4x^2 - 9 \quad \text{و} \quad B = 9x - 3 \quad \text{و} \quad A = 3x^2 - 3x$$

$$F = 4x^2 + 4x + 1 \quad \text{و} \quad E = 16x^2 - 8x + 1 \quad D = x^3 - x^2$$

أجوبة:



التعميل هو كتابة مجموع على شكل جذاء

$$A = 3x^2 - 3x = 3x(x-1)$$

$$B = 9x - 3 = 3(3x - 1)$$

$$C = 4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x-3)(2x+3)$$

$$D = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$$

$$E = 16x^2 - 8x + 1 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 1 + 1^2 = (4x-1)^2$$

$$F = 4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 = (2x+1)^2$$

IV. القوى و قوى العدد 10 و الكتابة العلمية:

1) تعريف: ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم و $n \in \mathbb{N}$

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{\text{مرّة } n \text{ عد}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{و} \quad a^1 = a; a^0 = 1$$

لكل a و b من \mathbb{R}^* و لكل m و n من \mathbb{N} لدينا:

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \quad \text{و} \quad a^n \times b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad \text{و} \quad (a^n)^m = a^{nm} = (a^m)^n$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}}$$

حالة خاصة: قوى العدد 10:

$$10^{-2} = 0,01 \quad \text{و} \quad 10^0 = 1 \quad \text{و} \quad 10^1 = 10$$

$$10^n = \underbrace{1000 \dots 0}_n; n \in \mathbb{N} \quad \text{و} \quad 10^{-1} = 0,1$$

$$\text{مثال: أحسب و بسط: } A = \frac{(10^6)^4 \times 10^{-2}}{10^4 \times 10^6 \times 10^{-13}}$$

$$\text{و} \quad B = \frac{10^{-8} \times 10^9 \times 10^7 \times 10^{-4}}{10^{-2} \times 10^3 \times 10^5}$$

الجواب:

$$A = \frac{(10^6)^4 \times 10^{-2}}{10^4 \times 10^6 \times 10^3} = 10^{24} \times 10^{-2} \times 10^{-4} \times 10^{-6} \times 10^{-3} = 10^1 = \frac{1}{10}$$

$$B = \frac{10^8 \times 10^9 \times 10^7 \times 10^{-4}}{10^{-2} \times 10^3 \times 10^5} = 10^8 \times 10^9 \times 10^7 \times 10^{-4} \times 10^2 \times 10^{-3} \times 10^{-5}$$