ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى جذع مشترك علوم

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

ملخص درس المستقيم في المستوى

1)أساس مستوى-معلم مستوى:تعريف1: إذا كانت $\vec{i}$ و $\vec{j}$ متجهتين غير مستقيميتين فان الزوج $(\vec{i},\vec{j})$ يسمى أساسا للمستوى.

تعريف: إذا كانت O نقطة من المستوى و $(\vec{i},\vec{j})$ أساس للمستوى فان $(O,\vec{i},\vec{j})$ هو معلم في المستوى.

2)إحداثيات نقطة: ليكن $(O,\vec{i},\vec{j})$ معلما بحيث $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$. لكل نقطة M من المستوى يوجد زوج وحيد (x,y) بحيث: $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ والزوج (x,y) هو إحداثيتي النقطة M في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ و نكتب $M(x,y)$

مثال: في مثلث ABC إذا كانت $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ فان زوج إحداثيتي النقطة M في المعلم $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ هو $(3,-2)$.

3)إحداثيتا متجهة:: ليكن $(\vec{i},\vec{j})$ أساسا للمستوى. لكل متجهة $\vec{u}$ يوجد زوج وحيد (x,y) بحيث $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ والزوج (x,y) يسمى زوج إحداثيتي المتجهة $\vec{u}$ و نكتب $\vec{u}(x,y)$ وإذا كان $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{u'}(x',y')$ فان: $\vec{u}=\vec{u'}$ تكافئ $x=x'$ و $y=y'$.

خاصية: ليكن $(O,\vec{i},\vec{j})$ معلما. إذا كانت $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ فان: $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$

مثال: إذا كانت $A(1,-4)$ و $B(-3,7)$ فان $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$ أي أن $\overrightarrow{AB}(-3-1,7-(-4))$ و بالتالي $\overrightarrow{AB}(-4,11)$

ومنه: $\overrightarrow{AB}=-4\vec{i}+11\vec{j}$

4)إحداثيات مجموع متجهتين-إحداثيات ضرب متجهة في عدد حقيقي:

مثال: نعتبر في الأساس $(\vec{i},\vec{j})$ المتجهتين $\vec{u}(3,-2)$ و $\vec{v}(-5,1)$

حدد زوج إحداثيتي المتجهات التالية : $\vec{u}+\vec{v}$ و $5\vec{u}$ و $3\vec{u}-2\vec{v}$

الأجوبة : $\vec{u}(3,-2)$ يعني $\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}$ و $\vec{v}(-5,1)$ يعني $\vec{v}=-5\vec{i}+\vec{j}$

ومنه : $\vec{u}+\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}-5\vec{i}+\vec{j}=-2\vec{i}-\vec{j}$ أي : $\vec{u}+\vec{v}(-2,-1)$

زوج إحداثيتي المتجهة $5\vec{u}$ هو $(5\times3,5(-2))$ أي $5\vec{u}(15,-10)$

$3\vec{u}-2\vec{v}=9\vec{i}-6\vec{j}+10\vec{i}-2\vec{j}=19\vec{i}-8\vec{j}$ أي : $3\vec{u}-2\vec{v}(19,-8)$

خاصية: إذا كانت $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ و M منتصف القطعة $[AB]$ فان: $M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

خاصية: ليكن $(O,\vec{i},\vec{j})$ معلما متعامدا ممنظما. إذا كانت: $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ فان: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

5)شرط استقامية متجهتين:خاصية و تعريف: لتكن $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$ متجهتين من المستوى المنسوب إلى الأساس $(\vec{i},\vec{j})$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان إذا و فقط إذا كان: $xy'-x'y=0$

العدد $xy'-x'y$ يسمى محددة المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بالنسبة للأساس $(\vec{i},\vec{j})$

و نكتب: $\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-x'y$

مثال : نعتبر في الأساس $(\vec{i},\vec{j})$ المتجهتين $\vec{u}(3,-2)$ و $\vec{v}(-6,4)$

هل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين ؟ **الجواب :** نحسب المحددة :

$$\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=3\times4-(-6)\times(-2)=12-12=0$$

ومنه $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين

6)مستقيم معرف بنقطة و متجهة:تعريف: ليكن (D) مستقيما يمر من نقطتين مختلفتين A و B. كل متجهة $\vec{u}$ غير منعدمة و مستقيمية مع المتجهة $\overrightarrow{AB}$ تسمى متجهة موجهة للمستقيم (D). نقول كذلك أن (D) يمر من A و موجه بالمتجهة $\vec{u}$ ولدينا كذلك $\overrightarrow{AB}$ متجهة موجهة للمستقيم (AB).

مثال: نعتبر المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-1$ حدد متجهة موجهة ل (D)

الجواب: النقطتان $A(1;0)$ و $B(0;-1)$ تنتميان إلى (D).

إذن: $\overrightarrow{AB}(-1;-1)$ متجهة موجهة للمستقيم (D).

تعريف: لتكن A نقطة من المستوى و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة.

مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$ حيث $t\in\mathbb{R}$.

هي المستقيم المار من A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}$. و نكتب $D(A;\vec{u})$

تمثيل بارامتري لمستقيم:مثال: نعتبر النقطة $A(3;-5)$ و المتجهة $(-2;3)$

حدد تمثيلاً بارامتري للمستقيم $D(A;\vec{u})$ **الجواب :** $(t\in\mathbb{R});\begin{cases} x=3-2t \\ y=-5+3t \end{cases}$

7)معادلة ديكارتية لمستقيم في المستوى:

خاصية: ليكن $(O,\vec{i},\vec{j})$ معلما. كل مستقيم (D) في المستوى له معادلة على الشكل $ax+by+c=0$ حيث $a\neq0$ أو $b\neq0$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (D). $\vec{u}(-b;a)$ متجهة موجهة ل (D)

مثال1: نعتبر في المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ النقط $A(2;4)$ و $B(5;-1)$ حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (AB).

الجواب : طريقة1 : $M(x,y)\in(AB)$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مستقيميتين

يعني $\det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})=0$ يعني $\begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ y-4 & -5 \end{vmatrix}=0$ لأن: $\overrightarrow{AM}(x-2,y-4)$ و $\overrightarrow{AB}(3,-5)$

يعني $-5(x-2)-3(y-4)=0$ يعني (AB) $-5x-3y+22=0$

طريقة2: نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل : (AB) $ax+by+c=0$

ونعلم أن : $\overrightarrow{AB}(3,-5)$ متجهة موجهة له : $\overrightarrow{AB}(-b,a)$

اذن : $-b=3$ و $a=-5$ اذن : $b=-3$ و $a=-5$

ومنه: (AB) $-5x-3y+c=0$ يجب الآن البحث عن c

نعلم أن: $A\in(AB)$ اذن احداثياته تحقق المعادلة :

$-5\times2-3\times4+c=0$ يعني : $c=22$ ومنه: (AB) $-5x-3y+22=0$

8)الأوضاع النسبية لمستقيمين:

خاصية: نعتبر المستقيمين $(D):ax+by+c=0$ و $(\Delta):a'x+b'y+c'=0$

(D) و (Δ) متوازيان إذا و فقط إذا كان: $ab'-a'b=0$.

واذا كان $a\times b'-a'\times b\neq0$ فان: (D) و (Δ) متقاطعان ويمكن تحديد نقطة التقاطع بحل النظمة المكونة من معادلتي (D) و (Δ)