

# Exercices corrigés d'arithmétique dans $\mathbb{N}$ Partie IV

# Exercices d'arithmétique

## Exercice 11 :

Soit  $n$  un entier naturel,  $A$  et  $B$  deux nombres tels que :

$$A = 2^n \times 3^4 + 2^n \quad \text{et} \quad B = 3^n \times 2^4 + 3^n$$

1 – a – Vérifier que :  $A = 2^{n+1} \times 41$  et  $B = 3^n \times 17$

b – En déduire la parité de  $A$  et  $B$ .

c – Déterminer  $\text{PGCD}(A, B)$  et  $\text{PPCM}(A, B)$  et déduire que  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux.

2 – Montrer que :  $(A - 2^n)(B - 3^n)$  est divisible par 1296.

3 – Montrer que :  $3^n \times A - 2^n \times B$  est un multiple de 5 et 13

## Exercice 12 :

On pose  $a = 2^3 \times 5^2 + 2^5 \times 5$  et  $b = 2^2 \times 3 + 2^4 \times 3$

1 - Ecrire sous forme d'un produit de nombres premiers les deux entiers  $a$  et  $b$ .

2 - Calculer  $\text{PGCD}(a, b)$  et  $\text{PPCM}(a, b)$

3 - Déterminer le plus petit dénominateur commun puis calculer la somme

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

# Exercices d'arithmétique

Solution de l'exercice 11 :

Soit  $n$  un entier naturel,  $A$  et  $B$  deux nombres tels que :

$$A = 2^n \times 3^4 + 2^n \quad \text{et} \quad B = 3^n \times 2^4 + 3^n$$

1 – a - Vérifier que:  $A = 2^{n+1} \times 41$  et  $B = 3^n \times 17$

$$\text{On a } A = 2^n \times 3^4 + 2^n = 2^n(3^4 + 1) \quad \text{donc } A = 2^n \times 82 \quad \text{donc } A = 2^n \times 2 \times 41$$

$$\text{D'ou } A = 2^{n+1} \times 41$$

$$B = 3^n \times 2^4 + 3^n = 3^n(2^4 + 1)$$

$$\text{D'ou } B = 3^n \times 17$$

b - En déduire la parité de  $A$  et  $B$ .

$$\text{On a } A = 2^{n+1} \times 41 = 2(2^n \times 41) \quad \text{et} \quad 2^n \times 41 \in \mathbb{N}$$

D'ou  $A$  est pair

On a  $B = 3^n \times 17$  et  $3$  est impair donc  $3^n$  est impair or  $17$  est impair

On sait que le produit de deux nombres impairs est impair.

D'ou  $B$  est impair

# Exercices d'arithmétique

c – Déterminer  $\text{PGCD}(A, B)$  et  $\text{PPCM}(A, B)$  et déduire que A et B sont premier entre eux.

$$\text{On a } A = 2^{n+1} \times 41 \quad \text{et} \quad B = 3^n \times 17$$

$$\text{D'où } \text{PGCD}(A, B) = 1$$

$$\text{PPCM}(A, B) = 2^{n+1} \times 41 \times 3^n \times 17$$

On a  $\text{PGCD}(A, B) = 1$  d'où A et B sont premier entre eux.

2 – Montrer que :  $(A - 2^n)(B - 3^n)$  est divisible par 1296

$$A = 2^n \times 3^4 + 2^n \quad \text{et} \quad B = 3^n \times 2^4 + 3^n$$

$$(A - 2^n)(B - 3^n) = (2^n \times 3^4 + 2^n - 2^n)(3^n \times 2^4 + 3^n - 3^n)$$

$$\text{Donc } (A - 2^n)(B - 3^n) = 2^n \times 3^4 \times 3^n \times 2^4$$

$$\text{Donc } (A - 2^n)(B - 3^n) = 2^n \times 3^n \times 3^4 \times 2^4 = (2 \times 3)^n \times (2 \times 3)^4$$

$$\text{Donc } (A - 2^n)(B - 3^n) = 6^n \times 6^4 \quad \text{Donc } (A - 2^n)(B - 3^n) = 1296 \times 6^n$$

D'où  $(A - 2^n)(B - 3^n)$  est divisible par 1296

# Exercices d'arithmétique

3 - Montrer que :  $3^n \times A - 2^n \times B$  est un multiple de 5 et 13

$$3^n \times A - 2^n \times B = 3^n \times (2^n \times 3^4 + 2^n) - 2^n \times (3^n \times 2^4 + 3^n)$$

$$3^n \times A - 2^n \times B = 3^n \times 2^n \times 3^4 + 3^n \times 2^n - 2^n \times 3^n \times 2^4 - 2^n \times 3^n$$

$$3^n \times A - 2^n \times B = 3^n \times 2^n (3^4 - 2^4) = (3 \times 2)^n (81 - 16)$$

$$\text{Donc } 3^n \times A - 2^n \times B = 6^n \times 65 \quad \text{donc } 3^n \times A - 2^n \times B = 6^n \times 5 \times 13$$

D'où  $3^n \times A - 2^n \times B$  est un multiple de 5 et 13

# Exercices d'arithmétique

Solution de l'exercice 12 :

On pose  $a = 2^3 \times 5^2 + 2^5 \times 5$  et  $b = 2^2 \times 3 + 2^4 \times 3$

1 - Ecrire sous forme d'un produit de nombres premiers les deux entiers a et b.

On a  $a = 2^3 \times 5^2 + 2^5 \times 5$

$$a = 2^3 \times 5 ( 5 + 2^2 ) = 2^3 \times 5 \times 9 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$\text{D'ou } a = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

On a  $b = 2^2 \times 3 + 2^4 \times 3$

$$b = 2^2 \times 3 + 2^4 \times 3 = 2^2 \times 3( 1 + 2^2)$$

$$\text{D'ou } b = 2^2 \times 3 \times 5$$

2 - Calculer PGCD(a , b) et PPCM(a , b)

$$a = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$b = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$\text{PGCD}(a , b) = 2^2 \times 3 \times 5 \quad \text{PPCM}(a , b) = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

# Exercices d'arithmétique

3 - Déterminer le plus petit dénominateur commun puis calculer la somme

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

On a  $\text{PPCM}(a, b) = 2^3 \times 3^2 \times 5$  et  $a = 2^3 \times 3^2 \times 5$  donc  $\text{PPCM}(a, b) = a$

Le plus petit dénominateur commun de  $\frac{1}{a}$  et  $\frac{1}{b}$  est le  $\text{PPCM}(a, b)$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2^3 \times 3^2 \times 5} + \frac{1}{2^2 \times 3 \times 5} = \frac{1}{2^3 \times 3^2 \times 5} + \frac{2 \times 3}{2^3 \times 3^2 \times 5}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{6}{a} = \frac{7}{a}$$

D'où 
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{7}{360}$$