

# PRODUIT SCALAIRE

**Exercice1** : Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A et  $AB = 2cm$

Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB}$

**Solution :**

On a  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA}$  car :

A est le projeté orthogonale de C sur (AB) et B est le projeté orthogonale de B sur (AB)

et A est le projeté orthogonale de C sur (AB)

donc  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AA = AB \times 0 = 0$

de même On a  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BA = 2 \times 2 = 4$

de même On a  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} = -BA \times AB = -2 \times 2 = -4$

**Exercice2** : Soit un triangle équilatéral ABC de côté a.

Calculer :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

**Solution :**

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos BAC$

$= a \times a \times \cos \frac{\pi}{3} = a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

**Exercice3** : Soit CFG un triangle tel que  $CF = 7$  et  $CG = 6$  et  $FG = 3$

Calculer :  $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CF}$

**Solution :**

$\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2} (CG^2 + CF^2 - GF^2) = \frac{1}{2} (6^2 + 7^2 - 3^2) = 38$

**Exercice4** : soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs tels que :

$\|\vec{u}\| = \frac{5}{2}\sqrt{2}$  et  $\|\vec{v}\| = 4$  et  $(\vec{u}; \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$

**Solution :**

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$

**Exercice5** : Soit EFG un triangle tel que :  $EF = 5$   $EG = 3$  et  $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = -6$  calculer :  $\cos(FEG)$

**Solution :**  $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = \|\overrightarrow{EF}\| \times \|\overrightarrow{EG}\| \cos(FEG) = -6$

ssi  $EF \times EG \cos(FEG) = -6$  ssi  $5 \times 3 \cos(FEG) = -6$

ssi  $\cos(FEG) = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$

**Exercice6** : Soit ABC un triangle tel que :  $AB = 3$   $AC = 4$  et  $BAC = \frac{2\pi}{3}$

Calculer :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

**Solution :**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \hat{A} = AB \times AC \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 3 \cos\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right) = 12 \cos\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 12 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 3 \cos\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right) = 12 \cos\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = -12 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

**Car :**  $\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -6$

**Exercice7** : 1) Soit ABC un triangle tel que  $AB = 7$  et  $AC = 5$  et  $BC = 6$

a) Calculer  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$  et en déduire  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)

Calculer AH

2) sachant que  $\|\vec{u}\| = 4$  et  $\|\vec{v}\| = 2$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2}$

a) Calculer :  $A = (2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v})$  et  $B = \left(\frac{\vec{u}}{2} - \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} + \frac{\vec{v}}{2}\right)$

$C = (\vec{u} - \vec{v})^2$  et  $D = (2\vec{u} + 3\vec{v})^2$

b) en déduire  $E = \|\vec{u} - \vec{v}\|$  et  $F = \|2\vec{u} + 3\vec{v}\|$

**Solution :**

1) Calcul de  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$

On a  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{BA}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2)$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{BA}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2)$

$= \frac{1}{2} (BC^2 - AB^2 - AC^2) = \frac{1}{2} (6^2 - 7^2 - 5^2) = -19$

donc :  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -19$

donc : On a  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 19$

a) Calcul de AH

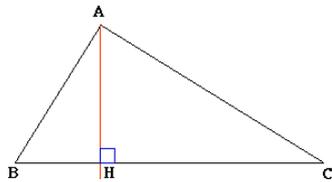
On a  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$  donc :  $AH = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB} = \frac{19}{7}$

2) a)  $A = (2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{u} + 4\vec{u} \cdot \vec{v} - 3\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\vec{v} \cdot \vec{v}$

$A = (2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{u} + 4\vec{u} \cdot \vec{v} - 3\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\vec{v} \cdot \vec{v}$

$A = 2\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - 6\vec{v} \cdot \vec{v} = 2 \cdot \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - 6 \cdot \|\vec{v}\|^2 = 2 \times 4^2 + \frac{1}{2} - 6 \times 2^2$

$$A = 32 + \frac{1}{2} - 24 = \frac{15}{2}$$



$$B = \left(\frac{\vec{u}}{2} - \vec{v}\right) \cdot \left(\frac{\vec{u}}{2} + \vec{v}\right) = \frac{1}{2}\vec{u}\cdot\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{u}\cdot\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}$$

$$B = \frac{1}{2} \times \|\vec{u}\|^2 - \frac{3}{4} \times \vec{u}\cdot\vec{v} - \frac{1}{2} \times \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2} \times 4^2 - \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \times 2^2$$

$$B = 8 + \frac{3}{2} - 2 = \frac{51}{8}$$

$$C = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 4^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 2^2$$

$$C = 16 + 1 + 4 = 21$$

$$D = (2\vec{u} + 3\vec{v})^2 = 4\vec{u}\cdot\vec{u} + 12\vec{u}\cdot\vec{v} + 9\vec{v}\cdot\vec{v} = 4\|\vec{u}\|^2 + 12\vec{u}\cdot\vec{v} + 9\|\vec{v}\|^2$$

$$D = 4 \times 4^2 + 12\left(-\frac{1}{2}\right) + 9 \times 2^2 = 64 - 6 + 36 = 94$$

$$b) (\vec{u} - \vec{v})^2 = 21 \quad \text{donc} \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 94 \quad \text{donc} \quad \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{21}$$

$$(2\vec{u} + 3\vec{v})^2 = 94 \quad \text{donc} \quad \|2\vec{u} + 3\vec{v}\|^2 = 94 \quad \text{donc}$$

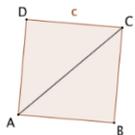
$$\|2\vec{u} + 3\vec{v}\| = \sqrt{94}$$

**Exercice8** : Soit un carré ABCD de côté c.

Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

**Solution :**

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2 + 0 = c^2$$



**Exercice9** : Soit ABC un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC)

Montrer que :

$$1) AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$2) AC \times AB = AH \times BC$$

**Solution :1)**

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2$$

On a :  $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{AC}$  car ABC un triangle rectangle en A

$$\text{Donc : } BC^2 = BA^2 + AC^2$$

$$2) \text{ on considère le triangle : } (\triangle ABC) \text{ donc : } \sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}$$

$$\text{Et on considère le triangle : } (\triangle ABH) \text{ donc : } \sin \hat{B} = \frac{AH}{AB}$$

$$\text{Donc : } \frac{AC}{BC} = \frac{AH}{AB} \text{ donc : } AC \times AB = AH \times BC$$

**Exercice10** : Soit ABC un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC)

$$\text{et } AH = 2\text{cm} \text{ et } \angle ABC = \frac{\pi}{3}$$

Calculer AB et BH et BC

**Réponse :**

a) On a ABH un triangle rectangle en H

$$\text{donc : } \sin(\angle ABC) = \frac{AH}{AB}$$

$$\text{Donc : } AB = \frac{AH}{\sin(\angle ABC)} = \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

b) On a  $AB^2 = AH^2 + HB^2$  car ABH un triangle rectangle en H

$$\text{Donc : } AB^2 - AH^2 = HB^2 \quad \text{Donc : } \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 2^2 = HB^2$$

$$\text{Donc : } \frac{16}{3} - 2^2 = HB^2 \quad \text{Donc : } HB^2 = \frac{4}{3}$$

$$HB = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

c) On a  $BA^2 = BH \times BC$  Donc :  $BC = \frac{BA^2}{BH}$

$$\text{Donc : } BC = \frac{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} = \frac{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$$

**Exercice11** : Soit ABC un triangle tel que et  $AB = 5$  et

$$AC = 8 \text{ et } \angle A = \frac{2\pi}{3} \text{ Calculer } BC \text{ et } \cos C$$

**Réponse :**

a) D'après le Théorème d'Al Kashi on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$$

$$BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \cos \frac{2\pi}{3} \text{ donc}$$

$$BC^2 = 25 + 64 + 40 = 129 \text{ donc } BC = \sqrt{129}$$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi on a :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2CA \times CB \cos C \text{ donc}$$

$$2CA \times CB \cos C = AC^2 + BC^2 - AB^2$$

$$\text{donc } \cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2CA \times CB} \text{ donc}$$

$$\cos C = \frac{64 + 129 - 25}{2 \times 8 \times \sqrt{129}} = \frac{168}{16\sqrt{129}} = \frac{21\sqrt{129}}{258}$$

**Exercice12** : Soit EFG un triangle tel que et  $EF = 7$

$$\text{et } EG = 5 \text{ et } \angle FEG = \frac{\pi}{4}$$

Calculer FG et  $\cos EGF$

**Exercice13** : Soit  $ABC$  un triangle tel que et  $BC = 4cm$   
 $AC = 6cm$  et  $AB = 3cm$  et  $I$  le milieu du segment  $[BC]$

Calculer :  $AI$

**Réponse** : D'après le théorème de la médiane dans le triangle  $ABC$  on a :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

$$\text{Donc : } 3^2 + 6^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}4^2 \text{ donc : } 9 + 36 = 2AI^2 + \frac{16}{2}$$

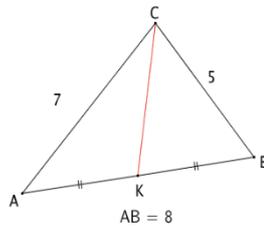
$$\text{Donc : } AI^2 = \frac{37}{2} \text{ par suite : } AI = \sqrt{\frac{37}{2}}$$

**Exercice14**: Soit  $ABC$  un triangle tel que :  $BC = 5$  ;  
 $AC = 7$  Et  $AB = 8$  et  $K$  le milieu du segment  $[AB]$ .  
 calculer  $CK$  .

**Réponse** : D'après le théorème de la médiane, on a :

$$CA^2 + CB^2 = 2CK^2 + \frac{AB^2}{2}$$

donc :



$$CK^2 = \frac{1}{2} \left( CA^2 + CB^2 - \frac{AB^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( 7^2 + 5^2 - \frac{8^2}{2} \right) = 21$$

$$\text{Donc : } CK = \sqrt{21}.$$

**Exercice15** : soit  $ABM$  un triangle tel que :  $AM = 3cm$   
 Et  $BM = 4cm$  et  $AB = 4cm$

$I$  le milieu du segment  $[AB]$ . Et  $J$  le milieu de  $[AM]$

Et  $K$  le milieu du segment  $[BM]$

Calculer :  $MI$  et  $AK$  et  $BJ$

**Réponse** : 1) calcul de  $MI$

D'après le théorème de la médiane dans  $ABM$  on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 \text{ donc } 3^2 + 4^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}4^2$$

$$\text{Donc : } 9 + 16 = 2MI^2 + \frac{16}{2} \text{ donc : } MI^2 = \frac{17}{2} \text{ donc : } MI = \sqrt{\frac{17}{2}}$$

calcul de  $AK$

D'après le théorème de la médiane dans  $ABM$

$$\text{Donc : } AB^2 + AM^2 = 2AK^2 + \frac{1}{2}BM^2$$

$$\text{Donc : } 2^2 + 3^2 = 2AK^2 + \frac{1}{2}4^2 \text{ donc : } AK^2 = \frac{17}{2} \text{ donc : } AK = \sqrt{\frac{17}{2}}$$

calcul de  $BJ$

D'après le théorème de la médiane dans  $ABM$

$$\text{Donc : } AB^2 + BM^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}AM^2$$

$$\text{Donc : } 4^2 + 4^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}3^2$$

$$\text{Donc : } \frac{55}{2} = 2BJ^2 \text{ donc : } BJ^2 = \frac{55}{4} \text{ donc : } BJ = \frac{\sqrt{55}}{2}$$

**Exercice16** : Soit  $EFGH$  un parallélogramme tel que et

$$EF = 3 \text{ et } EH = 5 \text{ et } FEH = \frac{3\pi}{4}$$

Calculer la Surface du triangle  $EFH$  et la Surface du parallélogramme  $EFGH$

**Réponse** : a)

$$S_{EFH} = \frac{1}{2}EF \times EH \sin E = \frac{1}{2}3 \times 5 \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{15}{2} \sin \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$S_{EFH} = \frac{15}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15}{4} \sqrt{2}$$

$$\text{b) } S_{EFGH} = 2 \times S_{EFH} = 2 \times \frac{15}{4} \sqrt{2} = \frac{15}{2} \sqrt{2}$$

**Exercice17** :: Soit  $ABC$

un triangle tel que :

$$a = BC = 6 \text{ et } A = 30^\circ \text{ et}$$

$$B = 73^\circ$$

Calculer  $b$  et  $c$

**Réponse**

D'après la formule de sinus on a :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{2 \times S}{abc}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin 30^\circ}{6} = \frac{1}{12} \text{ donc } \frac{\sin 73^\circ}{b} = \frac{1}{12} \text{ donc}$$

$$b = 12 \sin 73^\circ = 11.47$$

$$\frac{\sin 77^\circ}{c} = \frac{1}{12} \text{ donc } c = 12 \sin 77^\circ = 11.69$$

**Exercice18** : soit  $ABC$  un triangle tel que :  $AB = 1$

Et  $AC = \sqrt{2}$  et  $CB = 2$  et  $D$  un point tel que :

$$\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

1) Montrer que :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}$  et en déduire :  $\cos A$

2) Ecrire  $\overrightarrow{AD}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$

3) Calculer  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$  et en déduire la nature du triangle  $ABD$

4) Calculer :  $AD$

5) Soit  $I$  le milieu du segment  $[BC]$  et  $J$  le milieu du segment  $[AC]$

Calculer :  $AI$  et  $BJ$

**Réponse** : 1) D'après le Théorème d'Al Kashi dans  $ABC$

$$\text{on a : } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$$

$$\text{Et on a : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \hat{A} = AB \times AC \times \cos \hat{A}$$

$$\text{Donc : } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

$$\text{Donc : } 2^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2 - 2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

$$\text{Donc : } 4 = 1 + 2 - 2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \text{ donc : } 1 = -2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

Donc :  $\overline{AB} \times \overline{AC} = -\frac{1}{2}$

Déduction de  $\cos A$  : on a :  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{A}$

Donc :  $-\frac{1}{2} = AB \times AC \times \cos \hat{A}$  donc :  $-\frac{1}{2} = 1 \times \sqrt{2} \times \cos \hat{A}$

Donc :  $\cos \hat{A} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2})^2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

2)  $\overline{DB} + 2\overline{DC} = \vec{0}$  ssi  $\overline{DA} + \overline{AB} + 2(\overline{DA} + \overline{AC}) = \vec{0}$

$\overline{DA} + \overline{AB} + 2\overline{DA} + 2\overline{AC} = \vec{0}$  ssi  $\overline{AB} + 3\overline{DA} + 2\overline{AC} = \vec{0}$

Ssi  $\overline{AB} + 2\overline{AC} = 3\overline{AD}$  donc :  $\overline{AD} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + 2\overline{AC})$

3)  $\overline{AD} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + 2\overline{AC}) \cdot \overline{AB} = \frac{1}{3}(\overline{AB} \cdot \overline{AB} + 2\overline{AC} \cdot \overline{AB})$

$= \frac{1}{3}(\overline{AB}^2 + 2\overline{AC} \cdot \overline{AB}) = \frac{1}{3}(AB^2 + 2\overline{AC} \cdot \overline{AB}) = \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0$

Donc :  $\overline{AD} \cdot \overline{AB} = 0$  par suite :  $\overline{AD} \perp \overline{AB}$

Et donc :  $ABD$  est un triangle rectangle en  $A$

4) on a :  $\overline{AD} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + 2\overline{AC})$

donc :  $\overline{AD}^2 = \left(\frac{1}{3}(\overline{AB} + 2\overline{AC})\right)^2$  donc :

$AD^2 = \frac{1}{9}\left((\overline{AB})^2 + (2\overline{AC})^2 + 4\overline{AB} \cdot \overline{AC}\right) = \frac{1}{9}(AB^2 + 4\overline{AB} \cdot \overline{AC} + 4AC^2)$

$AD^2 = \frac{1}{9}\left(1 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \times 2\right) = \frac{1}{9}(1 - 2 + 8) = \frac{7}{9}$

Donc :  $AD = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

5) a) D'après le théorème de la médiane dans  $ABC$  on a :

$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$  donc  $1^2 + \sqrt{2}^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}2^2$

Ssi  $3 = 2AI^2 + 2$  ssi  $1 = 2AI^2$  ssi  $AI^2 = \frac{1}{2}$  ssi  $AI = \sqrt{\frac{1}{2}}$

b) D'après le théorème de la médiane dans  $ABC$  on a :

$BA^2 + BC^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}AC^2$

Donc :  $1^2 + 2^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}^2$  ssi  $5 = 2BJ^2 + 1$

Ssi  $BJ^2 = 2$  ssi  $BJ = \sqrt{2}$

**Exercice19**: soit  $ABC$  un triangle tel que :  $AB = \sqrt{7}$

Et  $AC = 2$  et  $BC = 3$

$I$  le milieu du segment  $[BC]$

• a) Calculer :  $\cos(\hat{BAC})$

b) Montrer que :  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 1$

c) Calculer  $AI$

2) soit  $M$  un point tel que :  $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{6}\overline{AC}$

a) Calculer :  $\overline{AM} \cdot \overline{AC}$

b) montrer que :  $\overline{MB} \cdot \overline{AC} = 0$

c) que peut-on déduire des droites :  $(MB)$  et  $(AC)$  ?

**Réponse : 1)a)**

D'après le Théorème d'Al Kashi dans  $ABC$  on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$

Donc :  $9 = 4 + 7 - 4\sqrt{7} \cos(A)$

Donc :  $-2 = -4\sqrt{7} \cos(A)$  donc :

$\cos(A) = \frac{2}{4\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{2(\sqrt{7})^2} = \frac{\sqrt{7}}{14}$

1)b) on a  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{A}$

Donc :  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2 \times \sqrt{7} \times \frac{\sqrt{7}}{14} = 2 \times \frac{(\sqrt{7})^2}{14} = \frac{14}{14} = 1$

1)c) D'après le théorème de la médiane dans  $ABC$  on a :

Donc :  $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$

Donc :  $\sqrt{7}^2 + 2^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}3^2$

Donc :  $11 = 2AI^2 + \frac{9}{2}$  donc  $AI^2 = \frac{13}{4}$  Donc :  $AI = \sqrt{\frac{13}{4}}$

2)a)  $\overline{AM} \cdot \overline{AC} = \left(\frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{6}\overline{AC}\right) \cdot \overline{AC} = \frac{1}{3}\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \frac{1}{6}\overline{AC} \cdot \overline{AC}$

$\overline{AM} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{6}\overline{AC}^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}AC^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times 4 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

2)b)  $\overline{MB} \cdot \overline{AC} = (\overline{MA} + \overline{AB}) \cdot \overline{AC} = \overline{MA} \cdot \overline{AC} + \overline{AB} \cdot \overline{AC}$

$\overline{MB} \cdot \overline{AC} = -\overline{AM} \cdot \overline{AC} + \overline{AB} \cdot \overline{AC} = -1 + 1 = 0$

2)b) donc :  $\overline{MB} \perp \overline{AC}$  par suite :  $(MB) \perp (AC)$

**Exercice20** : soit  $ABC$  un triangle tel que  $AB = 1$

Et  $BC = AC = \sqrt{2}$

$I$  le milieu du segment  $[AB]$  et  $D$  un point tel que :

$\overline{DB} - 2\overline{DC} = \vec{0}$

1) calculer  $CI$

2) calculer  $\overline{AD}$  en fonction de  $\overline{AB}$  et  $\overline{AC}$

3) montrer que :  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AI}$

4) en déduire que :  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}$  et en déduire  $\cos BAC$

5) calculer :  $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$  et en déduire la nature du

triangle  $BAD$

6) soit le point  $M$  tel que :  $-3\overline{MA} + 7\overline{MC} = \vec{0}$

a) calculer  $\overline{AD}$  en fonction de  $\overline{AC}$  et calculer  $\overline{AC} \cdot \overline{AD}$

b) montrer que  $(MD) \perp (AC)$

**Réponse : 1)** a) D'après le théorème de la médiane dans

$$ABC \text{ on a : } BC^2 + AC^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2} AB^2$$

$$\text{Donc : } 4 = 2CI^2 + \frac{1}{2} \text{ donc : } \frac{7}{4} = CI^2 \text{ donc : } CI = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$2) \quad \overline{DB} - 2\overline{DC} = \vec{0} \text{ ssi } \overline{DA} + \overline{AB} - 2(\overline{DA} + \overline{AC}) = \vec{0}$$

$$\text{Ssi } \overline{DA} + \overline{AB} - 2\overline{DA} - 2\overline{AC} = \vec{0} \text{ ssi } -\overline{DA} + \overline{AB} - 2\overline{AC} = \vec{0}$$

$$\text{Ssi } \overline{AD} = -\overline{AB} + 2\overline{AC} = 2\overline{AC} - \overline{AB}$$

$$3) \quad \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot (\overline{AI} + \overline{IC}) = \overline{AB} \cdot \overline{AI} + \overline{AB} \cdot \overline{IC}$$

On a :  $I$  le milieu du segment  $[AB]$  et  $ABC$  isocèle en  $C$

$$\text{Donc : } (IC) \perp (AB) \text{ cad } \overline{AB} \perp \overline{IC} \text{ donc : } \overline{AB} \cdot \overline{IC} = 0$$

$$\text{Par suite : } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AI}$$

$$4) \quad \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AI} = \|\overline{AB}\| \cdot \|\overline{AI}\| \cos 0 = AB \cdot AI \cdot 1 = AB \cdot \frac{AB}{2} \cdot \cos 0$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Calcul de :  $\cos BAC$

$$\text{On a : } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \text{ donc : } AB \times AC \times \cos \hat{A} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ssi } 1 \times \sqrt{2} \times \cos \hat{A} = \frac{1}{2} \text{ ssi } \cos \hat{A} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ ssi } \cos \hat{A} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$5) \text{ on a : } \overline{AD} = 2\overline{AC} - \overline{AB} \text{ donc : } \overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot (2\overline{AC} - \overline{AB})$$

$$\text{Ssi } \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} - \overline{AB} \cdot \overline{AB}$$

$$\text{Donc : } \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} - \overline{AB}^2 = 2 \times \frac{1}{2} - AB^2 = 1 - 1 = 0$$

Donc :  $\overline{AB} \perp \overline{AD}$  par suite  $BAD$  est un triangle rectangle en  $A$

$$6) \text{ a) } -3\overline{MA} + 7\overline{MC} = \vec{0} \text{ ssi } -3\overline{MA} + 7(\overline{MA} + \overline{AC}) = \vec{0}$$

$$\text{Ssi } -3\overline{MA} + 7\overline{MA} + 7\overline{AC} = \vec{0}$$

$$\text{Ssi } 3\overline{AM} - 7\overline{AM} + 7\overline{AC} = \vec{0} \text{ ssi } -4\overline{AM} = -7\overline{AC} \text{ ssi } \overline{AM} = \frac{7}{4}\overline{AC}$$

Calcul de :  $\overline{AC} \cdot \overline{AD}$  ???

$$\overline{AD} \cdot \overline{AC} = (2\overline{AC} - \overline{AB}) \cdot \overline{AC} = 2\overline{AC}^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{AC} = 2 \times 2 - \frac{1}{2} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$6) \quad \overline{MD} \cdot \overline{AC} =$$

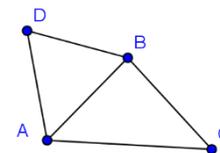
$$(\overline{MA} + \overline{AD}) \cdot \overline{AC} = \overline{MA} \cdot \overline{AC} + \overline{AD} \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{MD} \cdot \overline{AC} = -\overline{AM} \cdot \overline{AC} + \frac{7}{2} \text{ ssi } -\frac{7}{4} \cdot 2 + \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 0$$

$$\overline{MD} \cdot \overline{AC} = 0 \text{ donc : } \overline{MD} \perp \overline{AC} \text{ par suite : } (MD) \perp (AC)$$

**Exercice 21** : soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $B$  tel que  $AB = \sqrt{2}$

On construit à l'extérieur du triangle  $ABC$  le triangle équilatéral  $ABD$  (voir schéma)



1) calculer  $\overline{BA} \cdot \overline{BD}$  et  $\overline{BC} \cdot \overline{BD}$

2) calculer :  $AC$  et  $DC$

3) montrer que :  $\overline{AC} \cdot \overline{AD} = 1 - \sqrt{3}$

4) vérifier que :  $\angle DAC = \frac{7\pi}{12}$

5) en déduire :  $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

**Réponse : 1)**

$$\overline{BA} \cdot \overline{BD} = \|\overline{BA}\| \cdot \|\overline{BD}\| \cos \hat{ABD} = AB \cdot BD \cdot \cos \frac{\pi}{3} = (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\overline{BC} \cdot \overline{BD} = \|\overline{BC}\| \cdot \|\overline{BD}\| \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) = (\sqrt{2})^2 \times -\sin \left( \frac{\pi}{3} \right) = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

• D'après Pythagore on a :  $AC^2 = BC^2 + AB^2$

$$AC^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 \text{ ssi } AC^2 = 4 \text{ ssi } AC = 2$$

D'après le Théorème d'Al Kashi dans  $BCD$  on a :

$$DC^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \times BD \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$DC^2 = 2 + 2 - 2 \times 2 \times -\sin \left( \frac{\pi}{3} \right)$$

$$DC^2 = 4 + 4 \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) = 4 + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$DC = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

• D'après le Théorème d'Al Kashi dans  $ACD$  on a :

$$DC^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \times AD \cos(\alpha)$$

$$DC^2 = AC^2 + AD^2 - 2\overline{AC} \times \overline{AD}$$

$$(\sqrt{4 + 2\sqrt{3}})^2 = 4 + 2 - 2\overline{AC} \times \overline{AD}$$

$$\text{Ssi } 4 + 2\sqrt{3} = 4 + 2 - 2\overline{AC} \times \overline{AD}$$

$$\text{Ssi } \overline{AC} \times \overline{AD} = 1 - \sqrt{3}$$

$$4) \quad \angle DAC = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$$

$$\text{On a : } \overline{AC} \times \overline{AD} = 1 - \sqrt{3} \text{ donc : } AC \times AD \times \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) = 1 - \sqrt{3}$$

$$\text{Donc : } 2 \times \sqrt{2} \times \cos \left( \frac{7\pi}{12} \right) = 1 - \sqrt{3}$$

$$\text{Donc : } \cos \left( \frac{7\pi}{12} \right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2 \times \sqrt{2}} = \frac{(1 - \sqrt{3}) \times \sqrt{2}}{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

**Exercice 22** : soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $A$  tel que :

$$\cos(\hat{BAC}) = \frac{1}{4} \text{ et } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 16 \text{ et } I \text{ un point tel que :}$$

$$\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} \text{ et } J \text{ le milieu du segment } [BC]$$

Et soit la droite  $(\Delta)$  qui passe par  $I$  et perpendiculaire à la droite  $(AB)$  et soit  $E \in (\Delta)$

1) Construire une figure

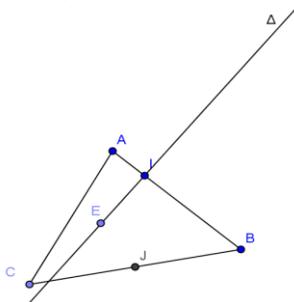
2) montrer que :  $AB = 8$  et calculer  $BC$

3) calculer :  $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$

4) montrer que :  $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AB} = 48$

5) calculer :  $AJ$

**Solution :1)**



2) on a :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$  donc  $AB \times AC \times \cos \hat{A} = 16$

$$\text{Donc : } AB \times AB \times \cos \hat{A} = 16 \text{ donc : } AB^2 \times \frac{1}{4} = 16$$

$$\text{Donc : } AB = 8 : \text{ donc } AB^2 = 64$$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi dans  $ABC$  on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$$

$$\text{Donc : } BC^2 = 64 + 64 - 2 \times 64 \times \frac{1}{4}$$

$$\text{Donc : } BC^2 = 96 \text{ donc : } BC = \sqrt{96}$$

$$3) \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}^2 = \frac{3}{4}BA^2 = \frac{3}{4}BA^2 = \frac{3}{4} \times 64 = 48$$

$$4) \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ car } \overrightarrow{EI} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{AB} = (-\overrightarrow{BI}) \cdot (-\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} = 48$$

5) D'après le théorème de la médiane dans  $ABC$  on a :

$$AB^2 + AC^2 = 2AJ^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

$$\text{Donc : } 8^2 + 8^2 = 2AJ^2 + \frac{1}{2}\sqrt{96}^2$$

$$\text{Donc : } 128 = 2AJ^2 + 48 \text{ donc : } 40 = AJ^2 \text{ donc : } AJ = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

**Exercice23** : soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $B$  tel que :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 12 \text{ et } \cos(\hat{ABC}) = \frac{1}{3} \text{ et } J \text{ un point}$$

$$\text{tel que : } \overrightarrow{BJ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{BA} \text{ et } I \text{ le milieu du segment } [AC]$$

Et soit la droite  $(\Delta)$  qui passe par  $J$  et perpendiculaire à la droite  $(AB)$  et soit  $E \in (\Delta)$

Et soit  $M \in (\Delta)$

1) Construire une figure

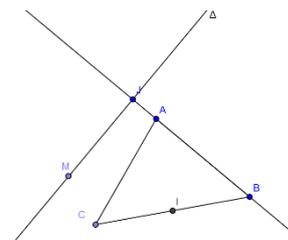
2) montrer que :  $AB = 6$  et

calculer  $AC$

3) calculer :  $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BA}$

4) montrer que :  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB} = 45$

5) calculer :  $BI$



**Solution :1)** on a :  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 12$

$$\text{Donc : } \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos \hat{B} = 12$$

$$\text{Donc : } BA \times BC \times \cos \hat{B} = 12 \text{ donc : } AB^2 \times \frac{1}{3} = 12$$

$$\text{Donc : } AB^2 = 36 \text{ donc : } AB = 6$$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi dans  $ABC$  on a :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos B$$

$$\text{Donc : } AC^2 = 36 + 36 - 2 \times 36 \times \frac{1}{3}$$

$$\text{Donc : } AC^2 = 54 \text{ donc : } AC = \sqrt{54}$$

$$3) \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{5}{4}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{5}{4}\overrightarrow{BA}^2 = \frac{5}{4}BA^2 = \frac{5}{4} \times 36 = 45$$

$$4) \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ car } \overrightarrow{MJ} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{AB} = (-\overrightarrow{BJ}) \cdot (-\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BA} = 45$$

5) D'après le théorème de la médiane dans  $ABC$  on a :

$$AB^2 + BC^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2}AC^2$$

$$\text{donc : } 6^2 + 6^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2}\sqrt{54}^2$$

$$\text{Donc : } 72 = 2BI^2 + 27 \text{ donc : } BI^2 = \frac{45}{2}$$

$$\text{Donc : } BI = \sqrt{\frac{45}{2}}$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices  
Que l'on devient un mathématicien

