1. Généralités sur les systèmes

11. Définition

Un système physique est un ensemble d'éléments liés entre eux dans le but de réaliser une tâche donnée. Ce système peut être de nature électrique, mécanique, pneumatique, hydraulique, électromécanique, etc. Ce processus soumis aux lois physiques est caractérisé par des grandeurs de deux types : les entrées et les sorties (voir figure 1a).

12. Transformée de LAPLACE

A toute fonction f(t) on associe une fonction F(p) de la variable complexe p et on écrit : **L[f(t)]=F(p)**
On a les propriétés suivantes :

☑ Dérivation : $L[f'(t)]=p.F(p)-f(0)$, on a très souvent $f(0)=0$.
☑ Intégration : $L[\int f(t).dt]=F(p)/p$.
☑ Théorème de la valeur initiale : $\lim_{t \to 0} f(t)=\lim_{p \to \infty} [p.F(p)]$.
☑ Théorème de la valeur finale : $\lim_{t \to \infty} f(t)=\lim_{p \to 0} [p.F(p)]$.

13. Fonction de transfert

Soit le système de la figure 1b qui présente une entrée E(p) et une sortie S(p).
Sa fonction de transfert est telle que : **H(p)=S(p)/E(p)**

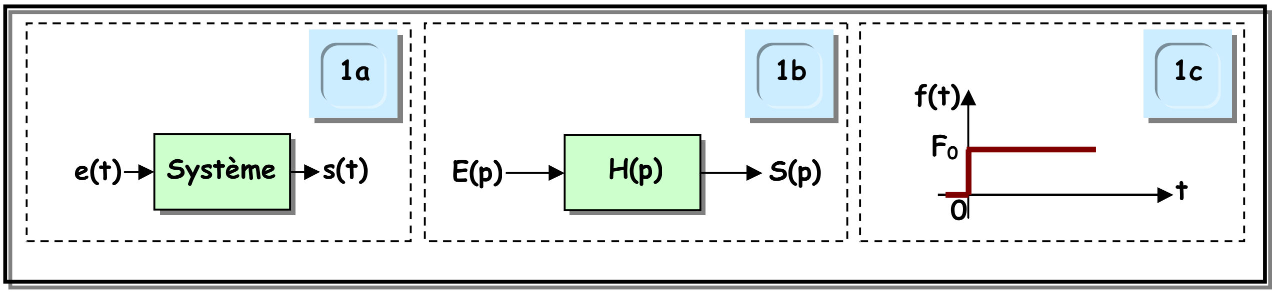
14. Fonction échelon

Une fonction f(t) est dite de type échelon si son allure est conforme à celle de la figure 1c.
f(t) peut s'écrire : **$f(t)=F_0.\delta(t)$** avec $\delta(t)=0$ pour $t < 0$ et $\delta(t)=1$ pour $t \geq 0$.
sa transformée de LAPLACE est : **$L[f(t)]=F_0/p$**

15. Réponse indicielle

L'évolution de la sortie s(t) suite à un échelon d'entrée e(t) s'appelle la réponse indicielle.

Figure 1



2. Système du premier ordre

21. Définition

Un système physique d'entrée e (t) et de sortie s (t) est dit du premier ordre s'il est régi par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants de la forme : **$\tau.[ds(t)/dt]+s(t)=e(t)$**
avec τ constante du temps ($\tau > 0$), caractérise l'évolution de s (t).

22. Fonction de transfert

L'expression générale de la fonction de transfert d'un système du premier ordre s'écrit :
$H(p)=H_0/(1+\tau p)$ avec H_0 transfert statique de H(p).

Fonction Traiter

23 Solution de l'équation différentielle

La solution générale de l'équation différentielle du 1er ordre est de la forme : **$s(t)=s_f+[(s_i-s_f).\exp(-t/\tau)]$**.

☑ s_i : valeur initiale de s(t) ou valeur à l'instant t=0 notée s(0).

☑ s_f : valeur finale de s(t) ou valeur à l'instant $t=\infty$ notée $s(\infty)$.

24. Réponse indicielle de s(t)

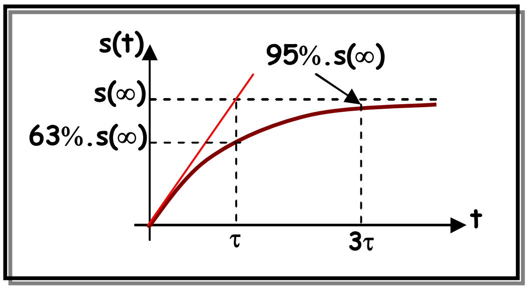
La réponse indicielle de la sortie s(t) suite à un échelon d'entrée est celle de la figure 2.
La courbe s(t) possède les propriétés suivantes :

☑ L'asymptote horizontale coupe la tangente à l'origine à l'instant $t=\tau$.

☑ A $t=\tau$ la sortie s(t) atteint 63% de $s(\infty)$: $s(\tau)=0,63.s(\infty)$.

Le temps de réponse à 5% est le temps au bout duquel s(t) atteint 95% de $s(\infty)$: **$tr_{5\%}=3\tau$**.

Figure 2



25. Exemples

251. Système électrique : Circuit RC de la figure 3

ve(t)=R.i(t)+vs(t) avec i(t)=C.[dvc(t)/dt]=C.[dvs(t)/dt] $\Rightarrow$ τ.[dvs(t)/dt]+vs(t)=ve(t) avec **τ=RC**.

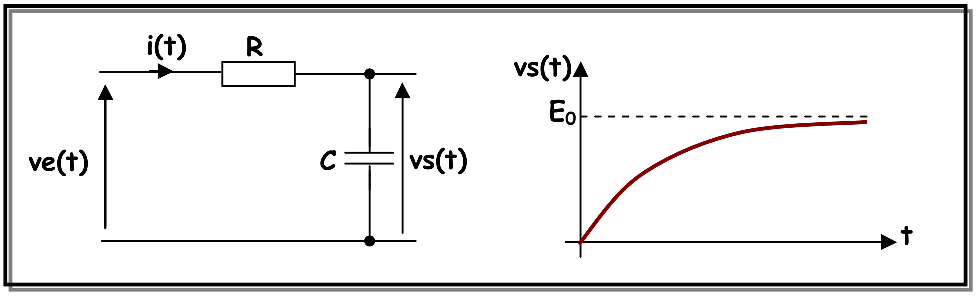
La fonction de transfert du circuit RC est telle que : **H(p)=Vs(p)/Ve(p)=1/(1+RCp)** avec **H_0=1** et **τ=RC**.

ve(t) est un échelon d'amplitude E_0 : ve(t)=$E_0.\delta(t)$

On suppose que le condensateur est initialement déchargé : vs(0)=0V.

$\Rightarrow$ **vs(t)=E_0.[1-exp(-t/τ)]** avec **vs(∞)=E_0** et **vs(0)=0V**.

Figure 3



252. Système hydraulique : figure 4

Considérons un réservoir, de surface S, initialement vide :

☑ qe, grandeur d'entrée du système, présente le débit de remplissage du réservoir.
C'est un échelon d'amplitude Q_0 : débit constant à partir de t=0.

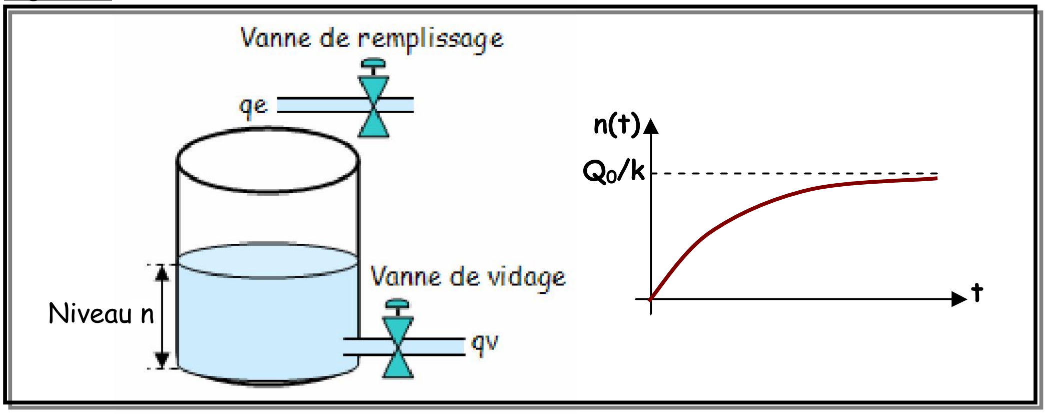
☑ qv constitue le débit de vidage du réservoir. Il est proportionnel au niveau n du liquide, grandeur de sortie du système, par la relation qv=k.n.

☑ Le volume v du liquide dans le réservoir s'écrit v=S.n alors que sa variation est dv(t)/dt=S[dn(t)/dt].

qe-qv=dv(t)/dt=S[dn(t)/dt] $\Rightarrow$ Q_0-k.n=S[dn(t)/dt]

$\Rightarrow Q_0/k=(S/k)[dn(t)/dt]+n \Rightarrow Q_0/k=\tau.[dn(t)/dt]+n$ avec $\tau=S/k$.
$\Rightarrow$ **$n(t)= Q_0/k.[1-\exp(-t/\tau)]$** avec **$n(\infty)=Q_0/k$** et **$n(0)=0$**.
La fonction de transfert liant le débit d'entrée Qe(p) et le niveau de sortie N(p) est telle que :
$H(p)=N(p)/Qe(p)=(1/k)/[1+(S/k)p]$ avec **$H_0=1/k$** et **$\tau=S/k$**.

Figure 4



3. Système du second ordre

31. Définition

Un système physique d'entrée e(t) et de sortie s(t) du 2ème ordre est régi par une équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants de la forme : **$(1/\omega_0^2).[d^2s(t)/d^2t]+(2m/\omega_0).[ds(t)/dt]+s(t)=e(t)$**
☑ ω_0 : pulsation propre du système.
☑ m : coefficient d'amortissement. Il est toujours positif (m〉0) et sans unité.

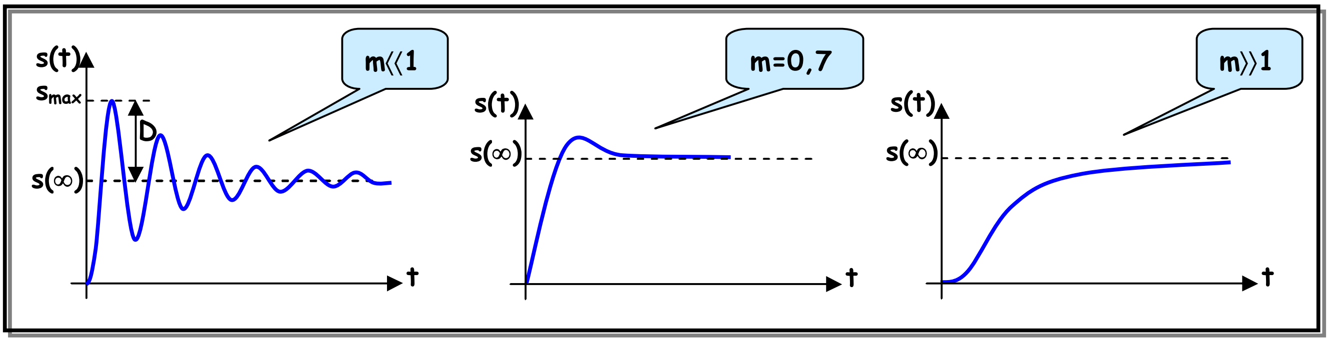
32. Fonction de transfert

L'expression générale de la fonction de transfert d'un système du second ordre s'écrit :
$H(p)=H_0/[1+(2mp/\omega_0)+(p/\omega_0)^2]$ avec H_0 transfert statique de H(p).

33 Solution de l'équation différentielle

La solution générale de l'équation différentielle dépend de la valeur de m. La figure 5 illustre l'allure de s(t) suite à un échelon d'entrée e(t) et ceci pour trois cas particuliers des valeurs de m.

Figure 5



☑ Pour m〈〈1 : Le système est pseudo oscillant ou oscillatoire amorti avec un dépassement important.
☑ Pour m〉〉1 : Le système est lent et ne présente aucun dépassement.
$\Rightarrow$ On n'a pas intérêt à avoir ni m〈〈1, ni m〉〉1. La valeur optimale de m est 0,7 : **$tr_{5\%}=(0,44.2\pi)/\omega_0$** et un dépassement n'excédant pas **5%**.

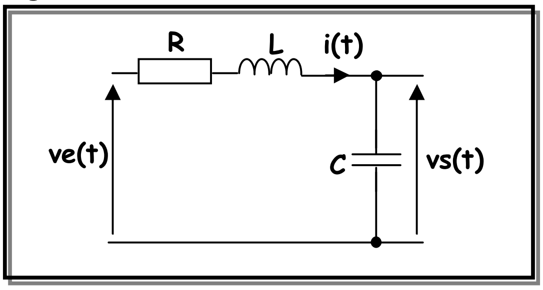
Fonction Traiter

34. Exemples

341. Système électrique : Circuit RLC de la figure 6

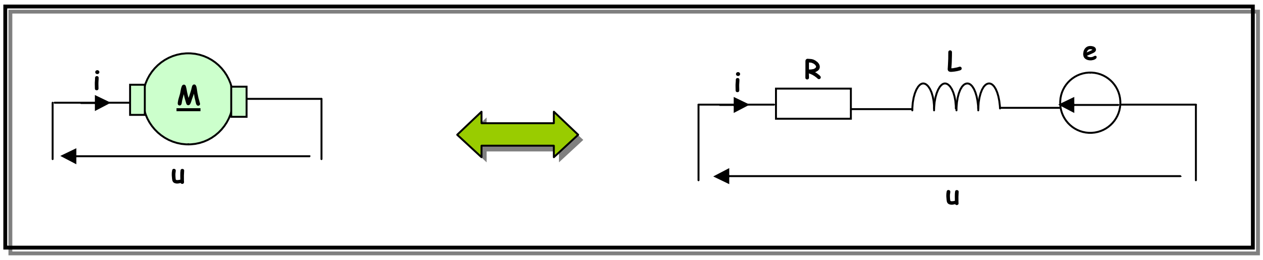
$ve(t)=Ri(t)+Ldi(t)/dt+vs(t)=RC[dvs(t)/dt]+LC[d^2vs(t)/dt]+vs(t)$
Pour une entrée échelon telle que $ve(t)=E_0.\delta(t)$, on aura :
$LC[d^2vs(t)/dt]+RC[dvs(t)/dt]+vs(t)=E_0$
Par identification, on trouve : $\omega_0=1/(LC)^{1/2}$, $m=(R/2)(C/L)^{1/2}$ et $s(\infty)=E_0$.
La fonction de transfert du circuit RLC est telle que : $H(p)=Vs(p)/Ve(p)=1/(1+RCp+LCp^2)$ avec $H_0=1$.

Figure 6



342. Système électromécanique de la figure 7 : Moteur à courant continu

Figure 7



On suppose que le moteur est à flux constant, les frottements sont négligés et le fonctionnement est à vide.
(1) : $u=Ri+[L(di/dt)]+e$
R et L : résistance et inductance de l'induit, e : force conte électromotrice du moteur.
(2) : $Cem=ki$ et $e=k\Omega$
Cem : couple électromagnétique (N.m) et k : coefficient de vitesse (V.s/rad) ou de couple (N.m/A).
(3) : $Cm-Cr=J(d\Omega/dt)$ et $Cm=Cu=Cem-Cp$
Cr : couple résistant(N.m) et J : moment d'inertie de l'ensemble mobile en rotation ($Kg.m^2$).
Cm : couple moteur, Cu : couple utile et Cp : couple des pertes collectives (pertes mécaniques et pertes fer).
Si on néglige Cp on aura à vide (Cr=0) : $Cem=ki=J(d\Omega/dt)$
La combinaison des équations conduit à l'équation différentielle : $(LJ/k^2)d^2\Omega/dt^2+(RJ/k^2)d\Omega/dt+\Omega=u/k$.
Pour une entrée échelon d'amplitude U_0 telle que $u(t)=U_0*\delta(t)$, on aura :
$(LJ/k^2)d^2\Omega/dt^2+(RJ/k^2)d\Omega/dt+\Omega=U_0/k$.
Par identification, on trouve : $\omega_0=k/(LJ)^{1/2}$, $m=(R/2k)(J/L)^{1/2}$ et $\Omega(\infty)=U_0/k$.
La fonction de transfert liant la vitesse $\Omega(p)$ à la tension d'alimentation U(p) est telle que :
$H(p)=\Omega(p)/U(p)=(1/k)/[1+(RJ/k^2)p+(LJ/k^2)p^2]$ avec $H_0=1/k$.

🕭 Remarque :

Si on néglige l'inductance L, l'équation différentielle se réduit à : $u/k=(RJ/k^2)d\Omega/dt+\Omega$
$\Rightarrow$ Le moteur à courant continu est équivalent à un système du 1er ordre.
Par identification, on trouve : $\tau=RJ/k^2$ et $\Omega(\infty)=U_0/k$.
La fonction de transfert se réduit à $H(p)=\Omega(p)/U(p)=(1/k)/[1+(RJ/k^2)p]$ avec $H_0=1/k$.

1. Système commandé

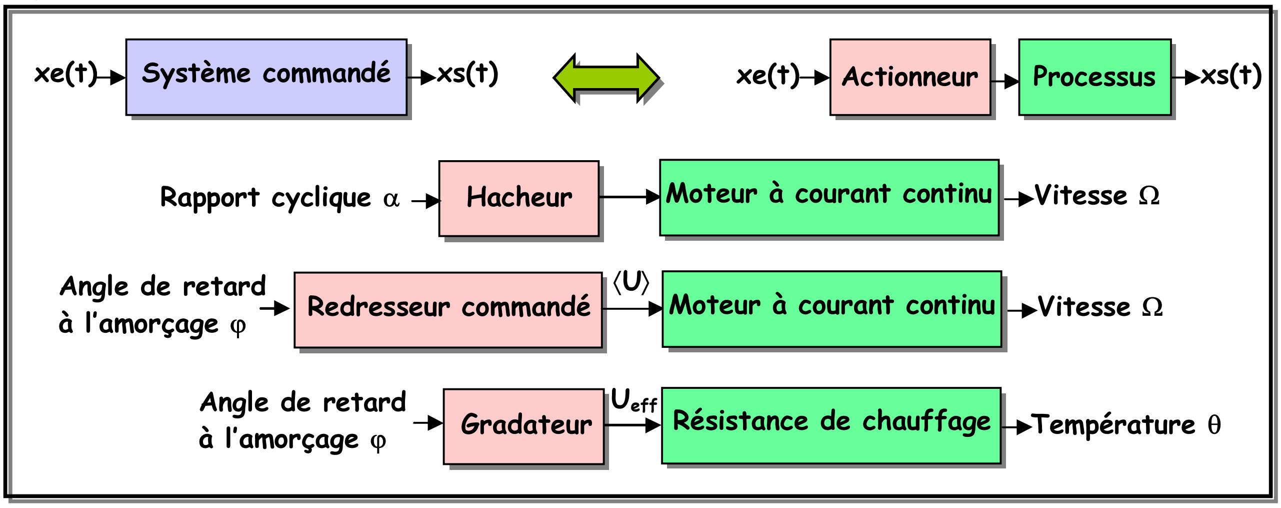
Un système est dit commandé si la grandeur de sortie xs(t) est fonction de la grandeur d'entrée xe(t) :

☑ xe(t) s'appelle signal de commande ou consigne susceptible de modifier l'état de la sortie xs(t).
☑ xs(t) s'appelle signal de sortie représentant la grandeur physique qu'on souhaite contrôler, à savoir : vitesse, position, température, débit, niveau, pression, etc.

Le système commandé peut être scindé en deux blocs :

☑ Le processus physique ⇒ exemples simples : moteur, vérin, résistance de chauffage, vanne, pompe, etc.
☑ Le bloc de commande ou actionneur : c'est un organe de puissance qui traduit la consigne en un signal capable de manipuler la grandeur physique de sortie.

Figure 1



Un système commandé, dit aussi système en boucle ouverte, présente un inconvénient majeur d'être sensible aux perturbations qui affectent la grandeur de sortie.

Par exemple, dans le cas du chauffage d'une pièce, lorsqu'une personne entre dans la pièce, l'ouverture de la porte provoque en général une diminution de la température ambiante de la pièce.

Pour immuniser un système commandé contre les perturbations, on a adopté la technique d'un système asservi qui consiste à contrôler automatiquement et en permanence la grandeur de sortie pour la maintenir égale à la valeur souhaitée (consigne).

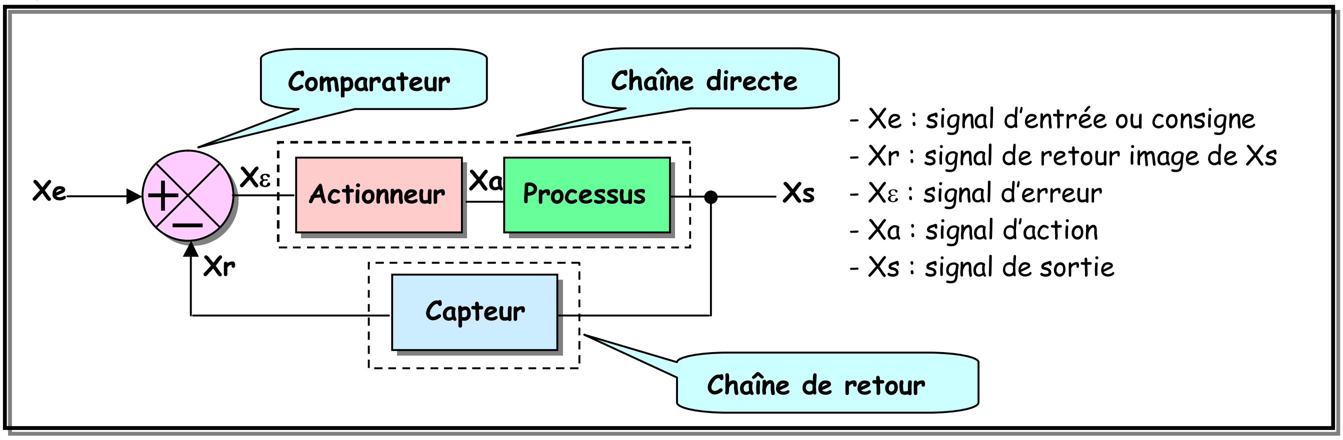
2. Structure d'un système asservi

La structure générale d'un système asservi est représentée à la figure 2.

Un système asservi, appelé aussi système bouclé ou en boucle fermée, est constitué de :

☑ Une chaîne d'action ou chaîne directe composée du processus et sa commande (actionneur).
☑ Une chaîne de réaction ou chaîne de retour formée par un capteur qui mesure en permanence la sortie Xs afin de fournir le signal de retour Xr image de Xs (feed-back). Le capteur doit être fidèle et insensible aux perturbations.
☑ Un comparateur qui élabore en permanence le signal d'erreur $X\varepsilon$ ⇒ $X\varepsilon = (Xe - Xr)$.

Figure 2



Remarque :

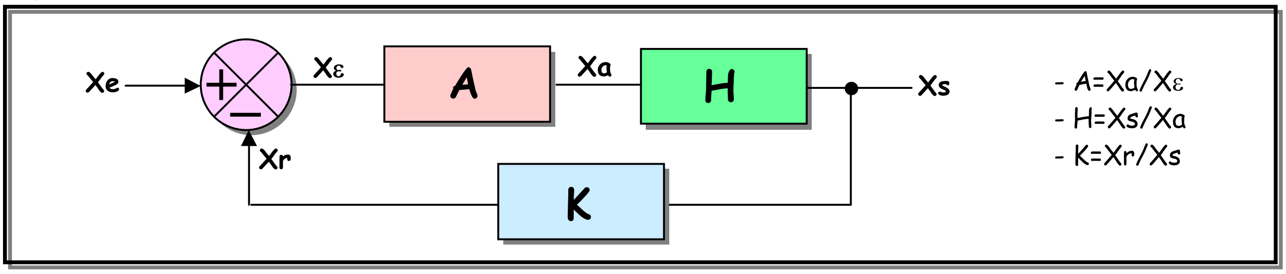
On classe les systèmes asservis en deux familles :

☑ Système régulé : C'est un système asservi particulier qui doit maintenir constante la sortie conformément à la consigne **constante** indépendamment des perturbations ⇒ Il s'agit d'une régulation.
Exemples : Régulation de température, vitesse, tension, etc.

☑ Système asservi : C'est un système asservi pour lequel la sortie doit poursuivre le plus fidèlement possible la consigne **variable** indépendamment des perturbations ⇒ Il s'agit d'un asservissement.
Exemples : Asservissement de position, fréquence, phase, etc.

Le schéma de la figure 2 peut être mis sous la forme du schéma fonctionnel, dit aussi schéma blocs, de la figure 3.

Figure 3



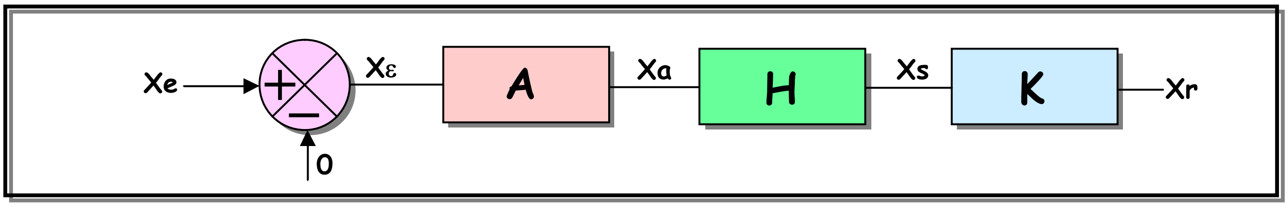
3. Fonctions de transfert

31. Fonction de transfert en boucle ouverte

En boucle ouverte le signal Xr n'est pas réinjecté au comparateur, par conséquent ou aura (voir figure 4) :

☑ Les blocs des deux chaînes seront en cascade.
☑ Le signal d'erreur Xε est égale au signal d'entrée ou consigne Xe ⇒ Xε=Xe.

Figure 4



La fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) est définie par le rapport : **T=Xr/Xe=A.H.K**

Fonction Traiter

32. Fonction de transfert en boucle fermée : Formule de Black

Considérons le schéma fonctionnel de la figure 3. Cherchons le rapport F=Xs/Xe.
On a : (1) $X\varepsilon$=Xe-Xr=Xe-K.Xs et (2) Xs=A.H.$X\varepsilon$.
La combinaison des équations (1) et (2) implique : Xs.[1+A.H.K]=Xe.A.H
La fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) est : **F=Xs/Xe=(A.H)/[1+(A.H.K)]**

4. Qualités requises à un système asservi

Les performances demandées à un système asservi dépendent de la phase de fonctionnement :

☑ En régime permanent : La précision
Un système asservi est dit précis si la sortie atteint la valeur désirée de l'entrée ou consigne.
Elle est définie par l'erreur : Lim[xe(t)-xs(t)] lorsque t tend vers l'infini($t \rightarrow \infty$).

☑ En régime transitoire : La rapidité et la stabilité.
Un système est dit rapide s'il rejoint rapidement son régime permanent. La rapidité est définie par le temps de réponse à 5% ($tr_{5\%}$).
Un système est dit stable si sa réponse n'est pas oscillatoire, que ça soit amortie ou non.

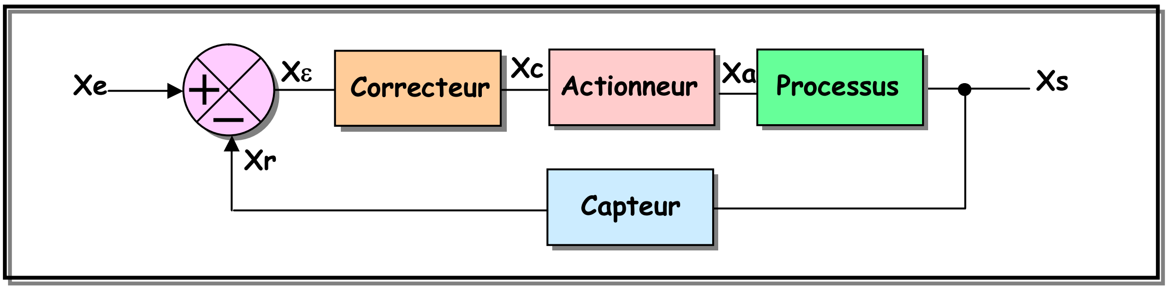
☑ Un système asservi performant doit être à la fois stable, rapide ($tr_{5\%}$ court) et précis (erreur statique trop faible).

5. Correction d'un système asservi

En pratique, on démontre que les paramètres décrits ci-dessus sont étroitement liés et contradictoires. Par exemple l'amélioration de la précision peut introduire l'instabilité et la lenteur du système. On déduit alors qu'un système asservi réel fait apparaître des défauts suivants : l'imprécision, la lenteur et l'instabilité.

L'amélioration des performances d'un système asservi consiste à corriger ses défauts par insertion d'un bloc supplémentaire placé juste après le comparateur : il s'agit d'un correcteur qui doit être choisi convenablement pour obtenir des qualités satisfaisantes (voir figure 5).

Figure 5

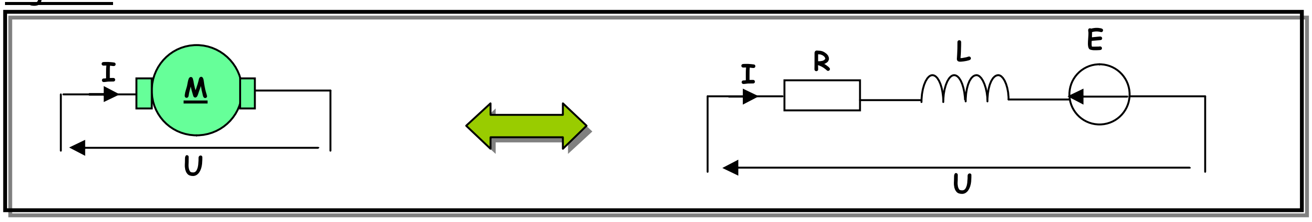


6. Régulation de la vitesse d'un moteur à courant continu

61. Modélisation du moteur à courant continu

Considérons la figure 6 qui représente le schéma équivalent du moteur à courant continu M.

Figure 6



On suppose que le moteur est à flux constant, les frottements sont négligés et on néglige l'inductance L de l'induit.

On a $E=U-RI=k\Omega \Rightarrow$ **$\Omega=U-RI/k$** $\Rightarrow$ Pour faire varier la vitesse de la machine à courant continu à flux constant, on doit agir sur la tension d'alimentation U.

62. Etude du système non régulé

621. Fonctionnement à vide

Le courant I_0 circulant dans l'induit est tellement négligeable qu'on peut le considérer nul. Le moteur, supposé alimenté sous la tension nominale U_n, tourne à une vitesse Ω_0 telle que : **$\Omega_0=U_n/k=E_0/k$**

622. Fonctionnement en charge

Le moteur, toujours alimenté sous la tension nominale U_n, absorbe un courant I_c considérable et tourne à une vitesse Ω_c telle que : **$\Omega_c=E_c/k=U_n-RI_c/k=E_0-RI_c/k$**

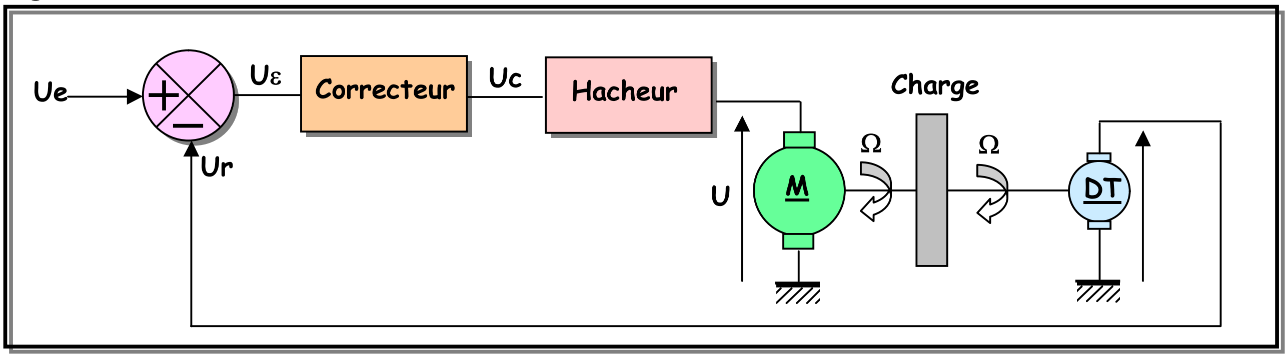
623. Variation de la vitesse de rotation

La présence de la charge mécanique affecte la vitesse de rotation Ω. Cette influence se traduit par une variation $\Delta\Omega$ telle que : $\Delta\Omega=\Omega_0-\Omega_c=(E_0/k)-(E_0-RI_c/k)=RI_c/k \Rightarrow$ **$\Delta\Omega=RI_c/k$**

63. Etude du système régulé

Le schéma du système régulé est représenté à la figure 7.

Figure 7



631. Principe de la régulation

On suppose que suite à une valeur de la consigne Ue, le hacheur délivre une tension U_1 et le moteur tourne à la vitesse Ω_1. En présence d'une perturbation, par exemple, une variation du couple résistant Cr, causée par une variation de la charge entraînée par le moteur, la vitesse Ω change ($\Omega=\Omega_2$) sans que la consigne soit modifiée.

Deux cas se présentent :

☑ Si Ω augmente ($\Omega_2 \rangle \Omega_1$) : Ur augmente $\Rightarrow$ Uε diminue $\Rightarrow$ le hacheur délivre une tension $U_2 \langle U_1 \Rightarrow \Omega$ diminue.

☑ Si Ω diminue ($\Omega_2 \langle \Omega_1$) : Ur diminue $\Rightarrow$ Uε augmente $\Rightarrow$ le hacheur délivre une tension $U_2 \rangle U_1 \Rightarrow \Omega$ augmente.

632. Eléments constitutifs du système régulé

6321. Capteur de vitesse

L'acquisition de la vitesse est confiée à une dynamo tachymétrique. C'est une machine à courant continu fonctionnant en génératrice à flux constant. Tournant à la vitesse Ω, elle produit une force électromotrice proportionnelle à $\Omega \Rightarrow$ **$Ur=k'\Omega$.**

🕭 Remarque : La mesure de la vitesse peut être réalisée à l'aide d'un codeur incrémental associé à un convertisseur fréquence/tension (monostable et filtre passe-bas par exemple comme l'indique la figure 8a).

Fonction Traiter

6322. Comparateur

Ce n'est autre qu'un montage soustracteur à base de l'amplificateur opérationnel (voir figure 8b).

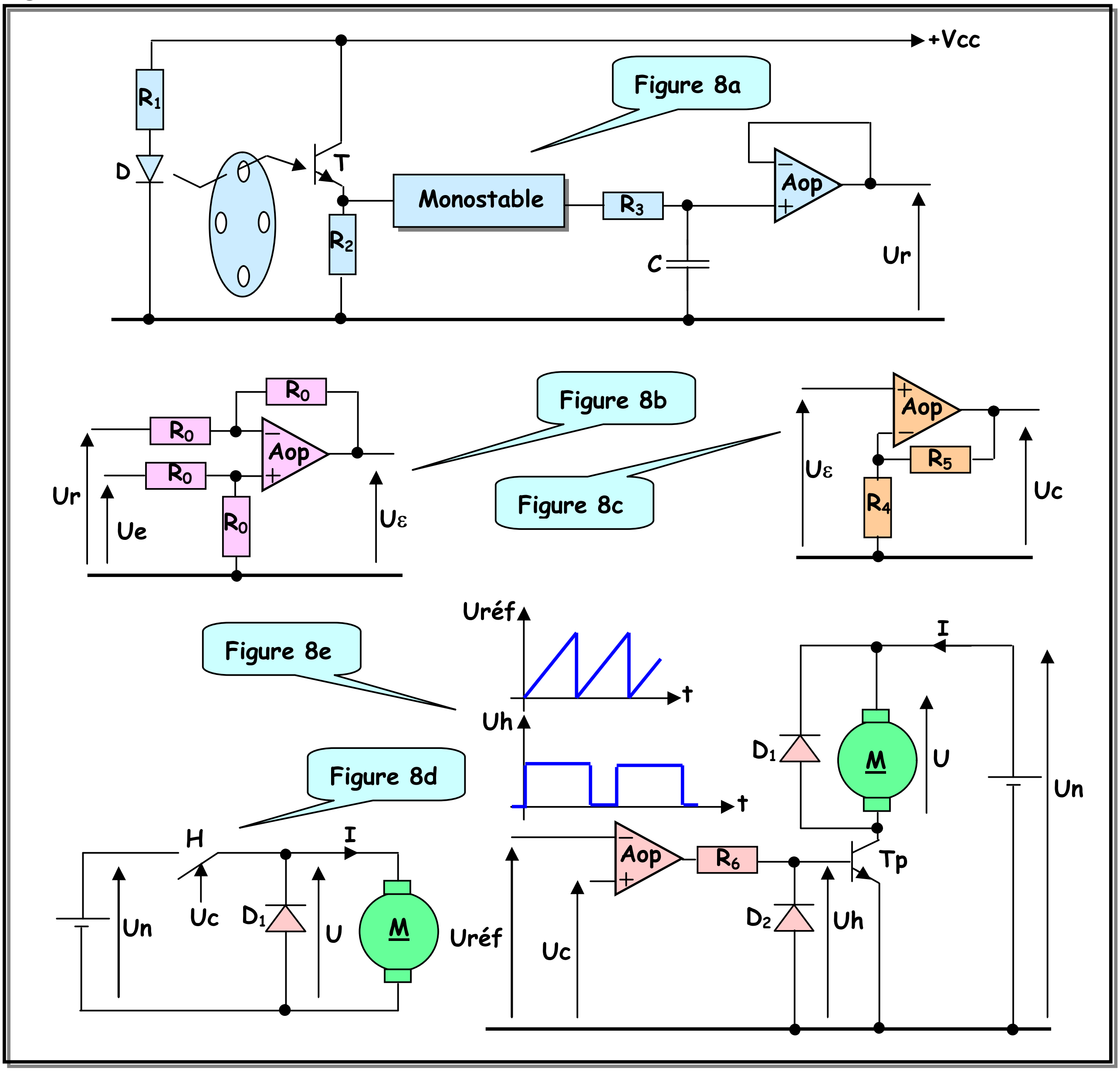
6323. Correcteur

Le correcteur est de type proportionnel ou amplificateur d'amplification C.
La tension d'erreur est amplifiée grâce au montage amplificateur non inverseur à base de l'Aop (figure 8c) :
$Uc=[1+(R_5/R_4)].U\varepsilon=C.U\varepsilon$

6324. Hacheur

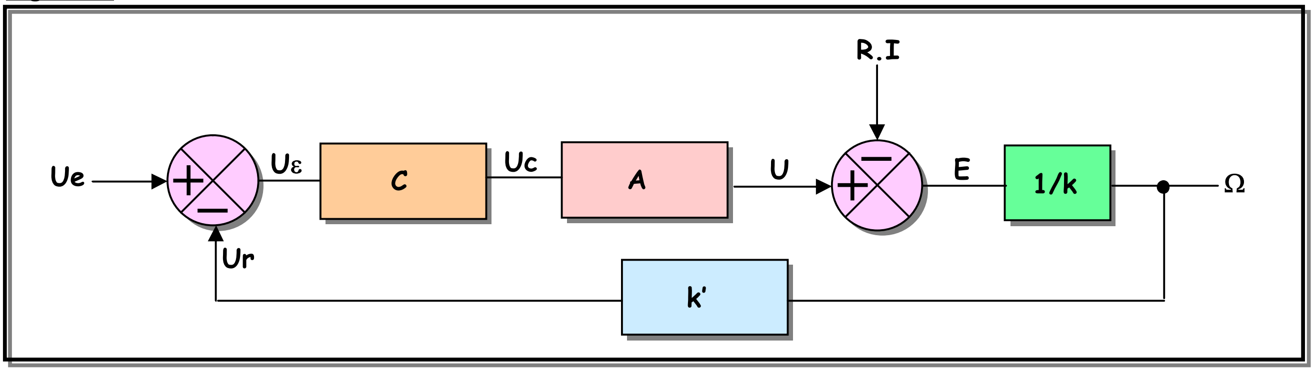
Le schéma de principe du hacheur est donné à la figure 8d et sa commande est conforme au schéma de la figure 8e.
Le rapport cyclique α de la tension Uh est fonction de la tension Uc $\Rightarrow$ **$\alpha=A'.Uc$**
La valeur moyenne de la tension U est proportionnelle au rapport cyclique $\alpha \Rightarrow$ **$U=\alpha.Un$**
On déduit alors la loi de commande du hacheur : U=A'.Un.Uc $\Rightarrow$ **U=A.Uc** Avec **A=A'.Un**

Figure 8



633. Schéma fonctionnel du système régulé

Figure 9



634. Expression de la vitesse de rotation Ω

(1) : $U\varepsilon = Ue - Ur = Ue - k'\Omega$

(2) : $U = A.C.U\varepsilon$

(3) : $\Omega = U - RI/k$

La combinaison des trois équations conduit à l'expression de la vitesse de rotation Ω en fonction de la consigne Ue et de l'entrée de perturbation du système R.I :

$\Omega = Ue.(AC/k)/[1+(ACk'/k)] - RI_c.(1/k)/[1+(ACk'/k)]$

Pour comparer les variations de vitesse du moteur avec et sans régulation, on se place dans les mêmes conditions :

☑ On fixe la valeur de la consigne Ue de telle sorte que le moteur tourne, à vide, à la vitesse Ω'_0 égale à Ω_0.

☑ On charge le moteur avec la même charge mécanique qui force le moteur de tourner à la vitesse Ω'_c et ceci sans modifier la valeur de la consigne Ue.

6341. Fonctionnement à vide

A vide le courant absorbé I_0 est supposé nul et le moteur tourne à la vitesse Ω_0' telle que :

$\Omega'_0 = \Omega_0 = Ue.(AC/k)/[1+(ACk'/k)]$

6342. Fonctionnement en charge

En charge le courant absorbé est I_c et le moteur tourne à la vitesse Ω_c' telle que :

$\Omega'_c = Ue.(AC/k)/[1+(ACk'/k)] - RI_c.(1/k)/[1+(ACk'/k)]$

6343. Variation de la vitesse de rotation

$\Delta\Omega' = \Omega_0' - \Omega_c' = RI_c.(1/k)/[1+(ACk'/k)] \Rightarrow \Delta\Omega/\Delta\Omega' = 1+(ACk'/k) \gg 1$

La régulation permet de réduire la variation de la vitesse de rotation et de masquer ainsi les fluctuations de la charge mécanique d'où l'intérêt d'un système régulé ou asservi.

64. Exemple numérique

On donne : Un=220 V, R=2 Ω, I_c=10 A, k=2 $V.rad^{-1}.s$, k'=0,05 $V.rad^{-1}.s$, C=20, A'=0,2 V^{-1} ⇒ A=0,2*220=44.

641. Sans régulation

$\Omega_0 = U_n/k = 220/2 = 110$ rad/s

$\Omega_c = E_c/k = U_n - RI_c/k = E_0 - RI_c/k = 220-20/2 = 100$ rad/s

$\Delta\Omega = RI_c/k = 20/2 = 10$ rad/s

642. Avec régulation

On cherche d'abords la valeur de la consigne Ue permettant de faire tourner le moteur à vide à la vitesse $\Omega'_0=\Omega_0$.

$\Omega'_0=\Omega_0=Ue.(AC/k)/[1+(ACk'/k)]=110$ rad/s $\Rightarrow$ **Ue=5,75 V**.

$\Omega'_c=Ue.(AC/k)/[1+(ACk'/k)]-RI_c.(1/k)/[1+(ACk'/k)]=109,56$ rad/s

$\Delta\Omega'=\Omega_0'-\Omega_c'= RI_c.(1/k)/[1+(ACk'/k)]=0,44$ rad/s

$\Rightarrow \Delta\Omega/\Delta\Omega'=1+(ACk'/k)=23 \Rightarrow \Delta\Omega' \ll \Delta\Omega$

Fonction Traiter