

Problème : 10 Pts

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} \ln^2(x)$

- 0,5 I. 1- Calculer $\lim_{0^+} f(x)$ et $\lim_{+\infty} f(x)$ et interpréter les résultats.
- 1 2 – Dresser le tableau de variation de f .
- 1 3 – Montrer que f admet deux points d'inflexion.
- 1 4 – Représenter C_f dans un repère orthonormée (o, \vec{i}, \vec{j}) avec $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$
on prend $e^2 \cong 7,4$ et $\frac{4}{e^2} \cong 0,6$.
- 0,5 5 – Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f , $(o \vec{i})$, les droites
d'équation $x = 1$ et $x = e^2$
- II. $\forall \rho \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_\rho = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^\rho}{x^2} dx$
- 0,5 1- Calculer I_1 .
- 0,5 2- a. Montrer que $\forall \rho \in \mathbb{N}^*$, $I_{\rho+1} = -\frac{2^{\rho+1}}{e^2} + (\rho + 1)I_\rho$
- 0,75 b- En déduire I_2, I_3 et I_4 .
- 0,5 c- Interpréter géométriquement $\pi \cdot I_4$
- III. On pose $F(x) = \int_{\ln(x)}^{1+\ln x} f(t) dt$.
- 0,5 1- Montrer que F est définie sur $I =]1, +\infty[$
- 0,5 2- Montrer que $\forall x \in I, \exists \beta \in [\ln x; \ln(x) + 1] / F(x) = f(\beta)$ puis
calculer $\lim_{+\infty} F(x)$.
- 0,75 3- $\forall \alpha \in]0,1[$, on pose : $A(x) = \int_\alpha^1 f(t) dt$. Calculer $A(x)$ en fonction
de α , puis $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$.
- 0,75 4- Montrer que F est dérivable sur I , puis calculer $F'(x)$.
- 5- On considère la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ définie par : $U_n = \int_1^{\frac{1}{n}+1} f(nt) dt$.
- 0,75 a- Montrer que $U_n = \frac{1}{n} \cdot \int_n^{1+n} f(t) dt$.
- 0,5 b- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

Exercice 1 : 03 Pts

Le plan P est rapporté à un repère orthonormée (o, \vec{i}, \vec{j}) on considère l'application F de $P \rightarrow P$, qui laisse invariant $\Omega(i)$ et qui associé à chaque point $M(Z)$ de $P - \{\Omega\}$

le point $M'(Z')$ tel que : $\left\{ \begin{array}{l} \Omega M M' \text{ est un triangle rectangle en } M \\ \text{et } (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{array} \right.$

- 1
0,5
0,5
1
- 1- Déterminer l'écriture complexe de : F
 - 2- Montrer que Ω est le seul point invariant par F
 - 3- Soit $R(\Omega, \frac{\pi}{3})$ la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Montrer que $F = R \circ h$ avec h une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.
 - 4- Soit H la projection orthogonale de M sur $(\Omega M')$ et on pose : $F(H) = M''$
Montrer que Ω, M, M' et M'' sont cocycliques.

Exercice 2 : 02,5 Pts

Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2 .

- 0,5
0,5
0,5
0,5
0,5
- 1- Montrer que m^2 et $m-1$ sont premiers entre eux.
 - 2- a- En déduire que l'équation $m^2 x + (m-1)y = 1$ (E) admet au moins une solution.
b- résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E) .
 - 3- On pose $m = 7$
 - a- Montrer que 401 est un nombre premier.
 - b- En déduire que $2011^{49^2} \equiv 2011[401]$.

Exercice 3 : 04,5 Pts

On pose E l'ensemble de couples (a, b) tel que $a \neq -1$ et on considère l'application $f_{(a,b)}$ définie par :

$$f_{(a,b)} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$Z = x + iy \rightarrow Z' = x' + iy' / \begin{cases} x' = (1+a)x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

- 0,5 1- Vérifier que $\forall(a, b) \in E, \forall(a', b') \in E$
- $f_{(a', b')} \circ f_{(a, b)} = f_{(a+a'+aa', b+b')}$, puis montrer que "o" est une loi de composition interne dans l'ensemble $A = \{f_{(a, b)} \mid (a, b) \in E\}$.
- 0,5 2- Montrer que $\forall(a, b) \in E; f_{(a, b)}^{-1} = f_{(\frac{-a}{1+a}; -b)}$
- 0,5 3- Montrer que (A, o) est un groupe commutatif.
- 4- On définit sur E la loi de composition interne "T" par : $\forall(a, b) \in E, \forall(a', b') \in E: (a, b) T (a', b') = (a+a'+aa', b+b')$ et on considère l'application $h: A \rightarrow E$
- $$f_{(a, b)} \rightarrow (a, b)$$
- 1 a- Montrer que h est un isomorphisme de (A, o) vers (E, T) .
- 0,5 b- En déduire la structure que (E, T) .
- 1 c- Déterminer l'élément neutre de (E, T) et le symétrique d'un élément (a, b) de (E, T) .
- 0,5 d- On pose $H = \{(x, \ln(x+1)) \mid x > -1\}$, montrer que (H, T) est un groupe commutatif.