الحدوديـــــــــات

القدرات المنتظرة

-* التمكن من تقنية القسمة الإقليدية على $x-a$ وإدراك قابلية القسمة على $x-a$.

I – الحدودية:كتابة و مصطلحات – تساوي حدودتين

1- أنشطة

نشاط1

لتكن الأعداد x و $x+3$ و $x+5$ أبعاد متوازي المستطيلات و $V(x)$ حجمه

حدد $V(x)$

$V(x)=x(x+3)(x+5)=x^3+8x^2+15x$

التعبير x^3+8x^2+15x يسمى تعبيرا حدوديا أو حدودية

x^3 هو الحد الذي له أكبر أس(هذا الأس هو 3) نقول إن درجة الحدودية $V(x)$ هو 3

نكتب $d^\circ(V(x))=3$

نشاط2

حدد من بين التعابير التالية تلك التي تمثل حدوديات وحدد درجتها

$P(x)=\frac{1}{3}x^5-3x^3+4x-1 \quad ; \quad Q(x)=x^2-\sqrt{2}x+3 \quad ; \quad H(x)=-6$

$T(x)=3x^2+2|x| \quad ; \quad G(x)=2\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x} \quad ; \quad K(x)=2x^4-2\sqrt{x}+2 \quad ; \quad N(x)=0$

-* كل تعبير على شكل ax^n حيث x متغير حقيقي و a عدد حقيقي و n عدد صحيح طبيعي يسمى حدية

إذا كان $a\neq 0$ درجة الحدية ax^n هو n و درجة الحدية a هو 0 .

الحدية المنعدمة لا درجة لها

-* الحدودية هي كل تعبير على شكل مجموع تكون جميع حدوده حديات

* $P(x)$ حدودية تتكون من أربعة حدود هي: -1 و $4x$ و $-3x^3$ و $\frac{1}{3}x^5$

العدد 3 هو درجة الحد $-3x^3$ و -3 معامل الحد $-3x^3$

العدد 5 هو درجة الحد $\frac{1}{3}x^5$ و $\frac{1}{3}$ معامل الحد $\frac{1}{3}x^5$

درجة الحدودية $P(x)$ هو 5 نكتب $d^\circ(P(x))=5$

* $Q(x)$ حدودية تتكون من 3 حدود . $d^\circ(Q(x))=2$

* $H(x)$ حدودية تتكون من حد واحد. $d^\circ(H(x))=0$

* كل تعبير من التعابير $T(x)$ و $G(x)$ و $K(x)$ ليس حدودية

* $N(x)$ حدودية منعدمة ليست لها درجة

الحدودية المنعدمة هي كل حدودية معاملاتها منعدمة.

نشاط3

اختصر الحدودية $P(x)=-2x^5+3x^3-4x^4+x^3+x+x^2-x^4$

اختصار حدودية هو كتابتها على شكل مجموع حدود درجتها مختلفة مثنى مثنى

الشكل المختصر للحدودية $P(x)$ هو $P(x)=-2x^5-5x^4+4x^3+x^2+x$

نشاط2

1- هل الحدوديتين P و Q متساويتان في كل الحالات

$P(x)=4x^3+3x^2-4x+1$ * $\qquad Q(x)=3x^2+x^3-4x+1+3x^3$

$P(x)=(\sqrt{2}-1)x^2-4x+1$ * $\qquad Q(x)=\frac{1}{\sqrt{2}+1}x^2-4x+1+$

$P(x)=-3x^3+x^2-x$ * $\qquad Q(x)=x^2-3x^3+x$

2- لتكن $P(x)=(a+b)x^3+(b-c)x^2+(a-c+1)x$

حدد a و b و c لكي تكون $P(x)$ حدودية منعدمة.

2- تعاريف

تعريف1

لتكن $P(x)$ حدودية مختصرة و غير منعدمة. درجة $P(x)$ هي درجة الحد الذي له أكبر درجة نرمز لها بالرمز $d°(P(x))$

ملاحظة: الحدودية المنعدمة ليست لها درجة

تعريف2

تكون حدوديتان ،مختصرتان غير منعدمتين ، متساويتين إذا كانت لهما نفس الدرجة و كانت معاملات حدودها من نفس الدرجة متساوية مثنى مثنى

3- حالات خاصة

*- كل حدودية من الدرجة الأولى تسمى حدانية و تكتب على شكل $ax+b$ حيث $a\in\mathbb{R}^*$; $b\in\mathbb{R}$

*- الحدودية من الدرجة الثانية تسمى ثلاثية الحدود و تكتب على شكل ax^2+bx+c حيث $a\in\mathbb{R}^*$ $(b;c)\in\mathbb{R}^2$

II- مجموع و جداء

1- أنشطة

أ- أحسب $P(x)+Q(x)$ و $P(x)-Q(x)$ مع مقارنة $d°(P+Q)$ و $d°(P)+d°(Q)$

$P(x)=4x^3+3x^2-4x+1$ * $\qquad Q(x)=3x^5-3x^3-6x-3$

$P(x)=-4x^6+2x^3-6x^2+1$ * $\qquad Q(x)=4x^6-3x^3-4x^2-6$

ب- أحسب $P(x)\times Q(x)$ مع مقارنة $d°(P\times Q)$ و $d°(P)\times d°(Q)$

$P(x)=-3x+2$ * $\qquad Q(x)=2x^2-6x-3$

$P(x)=3x^2-4x+1$ * $\qquad Q(x)=x^3-x^2-3$

ج – عمل

$P(x)=(x-3)^2-(5x+6)^2 \qquad Q(x)=(x+1)^3-27(x-1)^3$

2- خاصيات

*- مجموع حدوديتين P و Q هو حدودية يرمز لها بـ $P+Q$

ملاحظة $d°(P+Q)\le \sup(d°(P);d°(Q))$

*- فرق حدوديتين P و Q هو حدودية يرمز لها بـ $P-Q$

ملاحظة $d°(P-Q)\le \sup(d°(P);d°(Q))$

*- جداء حدوديتين P و Q هو حدودية يرمز لها بـ $P\times Q$

ملاحظة $d°(P\times Q)=d°(P)+d°(Q)$

III- جدر حدودية - القسمة على x-a

1) جدر حدودية

تعريف

لتكن $P(x)$ حدودية و α عددا حقيقيا
نقول إن العدد α جذر للحدودية $P(x)$ إذا كان $P(\alpha)=0$

أمثلة

$P(x)=x^3+4x^2+x-6$

حدد من بين الأعداد التالية 1 و1- و 2 و 3-. تلك التي تمثل جذرا لـ$P(x)$

2) القسمة على x-a

أنشطة

أ- نعتبر $P(x)=x^3+x+1$

- أحسب $P(3)$
- حدد حدودية $Q(x)$ حيث $P(x)-P(3)=(x-3)Q(x)$

ب- نعتبر $P(x)=2x^4-3x^2-x-2$

- حدد حدودية $Q(x)$ حيث $P(x)-P(1)=(x-1)Q(x)$
- حدد حدودية $Q'(x)$ حيث $P(x)-P(2)=(x-2)Q'(x)$

أ- خاصية

لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n\geq 1$ و α عدداحقيقيا .
توجد حدودية وحيدة $Q(x)$ درجتها $n-1$ حيث $P(x)=(x-\alpha)Q(x)+P(\alpha)$
$Q(x)$ خارج القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x-\alpha$
$P(\alpha)$ باقي القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x-\alpha$

ب- تقنية لحساب الخارج و الباقي

لنحدد خارج و باقي القسمة الاقليدية لـ$P(x)$ على $x-3$
حيث $P(x)=-3x^4+2x^3-x^2-5x+1$

$$
\begin{array}{r|l}
-3x^4+2x^3-x^2-5x+1 & x-3 \\ \cline{2-2}
3x^4-9x^3 & -3x^3-7x^2-22x-71 \\
-7x^3-x^2 & \\
7x^3-21x^2 & \\
-22x^2-5x & \\
22x^2-66x & \\
-71x+1 & \\
71x-213 & \\
-212 &
\end{array}
$$

ملاحظة $P(3)=-212$

* $P(x)=-2x^5-x^2+3x-2$

حدد خارج و باقي القسمة الاقليدية لـ$P(x)$ على $x-2$

ج- قابلية القسمة على x-a

تعريف

لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n \geq 1$ و α عددا حقيقيا
نقول إن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ إذا وجدت حدودية $Q(x)$ درجتها $n-1$
حيث $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$
ملاحظة: $P(\alpha)=0$

تمرين نعتبر $P(x)=x^3-x-6$
حدد حدودية $Q(x)$ حيث $P(x)=(x-2)Q(x)$ نلاحظ أن $P(2)=0$

نتيجة

لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n \geq 1$ و α عددا حقيقيا
نقول إن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ إذا و فقط إذا كان α جدرا للحدودية $P(x)$.

تمرين نعتبر $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$
1- تأكد أن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-3$
2- بإنجاز القسمة الاقليدية حدد حدودية $Q(x)$ حيث $P(x)=(x-3)Q(x)$
3- بين أن 1- جدرا للحدودية $Q(x)$. عمل $Q(x)$.
استنتج تعميلا للحدودية $P(x)$.

تمرين $P(x)=2x^3+3x^2-3x-2$
1- أحسب $P(-2)$ و $P(1)$ و $P(3)$
2- أنجز القسمة الاقليدية لـ $P(x)$ على $x+2$
3- بين إذا كان α جدرا غير منعدم لـ $P(x)$ فان $\frac{1}{\alpha}$ جدر لـ $P(x)$. استنتج الجذور الثلاث.

تمرين $P(x)=2x^3+mx^2-11x-6$
1- حدد m حيث $P(x)$ تقبل القسمة على $x-2$
2- نضع $m=3$. أحسب $P(-3)$
استنتج تعميلا للحدودية $P(x)$.