

الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية

1. ترتيب ومقارنة :

(a) بصفة عامة :

مقارنة عددين تعني البحث عن أكبرهما

لمقارنة عددين نعلم على الفرق ، حيث لدينا $(b \geq a) \Leftrightarrow (b - a \geq 0) \Leftrightarrow (a \leq b)$

مثال: a و b عدنان غير منعدمان مختلفي الإشارة $(a+b)^2$ و $a^2 + b^2$

لدينا $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ وبالتالي $(a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab$ نستنتج أن $(a+b)^2 \geq (a^2 + b^2)$ f 0

(b) مقارنة الكسور الموجبة :

نذكر بالقواعد التالية الخاصة بكسرين بسطيهما ومقاميهما موجبان:

• إذا كان لكسرين نفس المقام، فإن أكبرهما هو الذي له أكبر بسط : $\frac{2}{17} \leq \frac{13}{17}$

• إذا كان لكسرين نفس البسط، فإن أكبرهما هو الذي له أصغر مقام : $\frac{17}{13} \leq \frac{17}{2}$

• بصفة عامة لمقارنة كسرين أو أكثر، نوجد مقامات الكسور ثم نستعمل القاعدة الأولى:

لمقارنة الكسور $\frac{5}{6}$; $\frac{13}{18}$; $\frac{2}{3}$ نوجد المقامات أولا ، لدينا : $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$; $\frac{13}{18} = \frac{13}{18}$; $\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$ حسب القاعدة

الأولى لدينا $\frac{15}{18}$ f $\frac{13}{18}$ f $\frac{12}{18}$ نستنتج بالتالي أن : $\frac{2}{3}$ f $\frac{13}{18}$ f $\frac{5}{6}$

(c) مقارنة الكسور مع العدد 1 :

نذكر بالقواعد التالية:

• إذا كان البسط يساوي المقام فإن الكسر يساوي 1 : $\frac{17}{17} = 1$

• و إذا كان البسط أكبر من المقام فإن الكسر أكبر من 1 : $1 \leq \frac{23}{17}$

• و إذا كان البسط أصغر من المقام فإن الكسر أصغر من 1 . $\frac{15}{17} \leq 1$

(d) مقارنة أعداد يحتوي بعضها على جذور موجبة :

• في الحالات البسيطة غالبا ما نلتجى إلى مقارنة المربعات وفق إحدى القاعدتين :

$$(0 \leq x^2 \leq y^2) \Leftrightarrow (0 \leq x \leq y) \quad \text{أو} \quad (0 \leq x \leq y) \Leftrightarrow (0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{y})$$

لمقارنة الأعداد 9 ; $7\sqrt{2}$; $5\sqrt{3}$ نحسب المربعات : $9^2 = 81$; $(7\sqrt{2})^2 = 98$; $(5\sqrt{3})^2 = 75$

لدينا 98 f 81 f 75 ، نستنتج بالتالي أن : $5\sqrt{3} \leq 9 \leq 7\sqrt{2}$

• لكن اللجوء الى المربعات من البداية لا يمكن من المقارنة بل ربما يزيد الأمور تعقيدا . في هذه الحالة يمكن الاستعانة بالفرق في البداية ثم مقارنة المربعات بعد التأكد من أن الأعداد التي نريد مقارنتها موجبة:

لمقارنة العددين $a = 7\sqrt{3} + 11$; $b = 5\sqrt{3} - 7$. نتحقق أولا من إشارتي العددين :

لدينا العدد a f 0 لأنه مجموع عددين موجبين. أما العدد b فهو على شكل فرق عددين ، لدينا :

$7^2 = 49$; $(5\sqrt{3})^2 = 75$ ، بما أن $75 > 49$ فإن $5\sqrt{3} > 7$ وبالتالي $b = 5\sqrt{3} - 7 > 0$

نستنتج في النهاية أن : a f 0 و b f 0

حساب المربعات سوف لن يؤدي إلا الى تعقيد الحساب دون التوصل الى مقارنة العددين ولكم أن تجربوا ذلك بأنفسكم.

لنحسب الفرق أولا ، نجد : $a - b = 7\sqrt{3} + 11 - 5\sqrt{3} + 7 = 2\sqrt{3} + 18 > 0$. ومنه $a > b$.

لمقارنة العددين $a = 7\sqrt{3} - 11$; $b = 5\sqrt{3} - 7$. نتحقق أولا من إشارتي العددين :

نتأكد بنفس الطريقة السابقة أن : a f 0 و b f 0

لنحسب الفرق أولا ، نجد : $a - b = 7\sqrt{3} - 11 - 5\sqrt{3} + 7 = 2\sqrt{3} - 4$.

لدينا :

الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية

بما أن $12 < 16$ فإن $2\sqrt{3} < 4$ وبالتالي $2\sqrt{3} - 4 < 0$ ، $(2\sqrt{3})^2 = 12$; $4^2 = 16$
ومنه نستنتج أن $a < b$

2. الترتيب والعمليات : نعرض في الجدول التالي أهم القواعد المستعملة في المقارنة

| Opération | Domaine | Propriété | العملية |
|--------------------------|--|--|--------------------------|
| Somme | $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ | $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a + c \leq b + d$ | الجمع |
| Produit par des positifs | $\forall a \geq 0; \forall b \geq 0; \forall c \geq 0; \forall d \geq 0$ | $a \leq b \Rightarrow a \times c \leq b \times d$ | الضرب في الأعداد الموجبة |
| Produit par un seul réel | $\forall a; b \in \mathbb{R}; \forall c \geq 0$; $\forall a; b \in \mathbb{R}; \forall c \leq 0$ | $a \leq b \Rightarrow a \times c \leq b \times d$ $a \leq b \Rightarrow a \times c \geq b \times d$ | الضرب في عدد واحد |
| Opposé | $\forall a; b \in \mathbb{R}$ | $a \leq b \Rightarrow -a \geq -b$ | المقابل |
| Inverse des positifs | $\forall a > 0 ; \forall b > 0$ | $0 < a \leq b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$ | مقلوب الأعداد الموجبة |

قواعد القوى

$$a^0 = 1 \text{ (pour } a \neq 0) ; a^0 = a ; a^2 = a \times a$$

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}}$$

$$a^n \times a^m = a^{n+m} ; (a^n)^m = a^{n \times m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} ; \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^n \times b^n = (ab)^n ; \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Attention!!..... ne pas confondre avec les identités

$$a^n + b^n \neq (a+b)^n ; a^n - b^n \neq (a-b)^n$$

قواعد الجذور المربعة

$$\sqrt{a^2} = a \text{ (pour } a \geq 0) ; \sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b} \text{ (pour } a \geq 0, b \geq 0)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ (pour } a \geq 0, b \geq 0)$$

Attention!!.....

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} ; \sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

Puissances et racines

$$\forall a \geq 0; \forall b \geq 0; \forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 \leq a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq a^n \leq b^n$$

$$\forall a \geq 0; \forall b \geq 0; \forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 \leq a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$$

القوى والجذور

قواعد القيم المطلقة

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} ; |x \times y| = |x| \times |y| ; \begin{cases} |x| = x \Leftrightarrow x \geq 0 \\ |x| = -x \Leftrightarrow x \leq 0 \end{cases} ; |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$||x| + |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y| ; \begin{cases} |x| < r \Leftrightarrow -r < x < r \Leftrightarrow x \in]-r, r[\\ |x| > r \Leftrightarrow (x < -r \text{ ou } x > r) \Leftrightarrow x \in]-\infty, -r[\cup]r, +\infty[\end{cases}$$

قيمة مقربة :

نقول أن العدد x هو قيمة مقربة للعدد x إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$x \in]A - r, A + r[\text{ أي } |x - A| < r$$