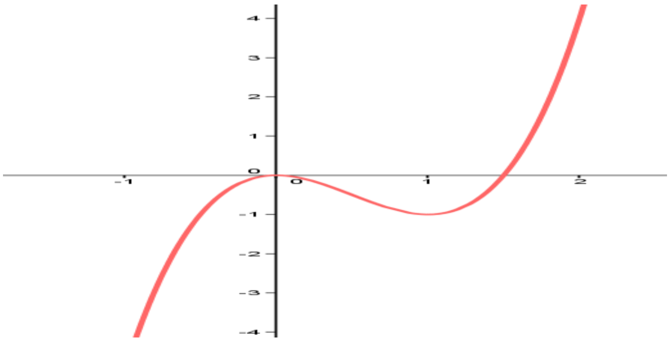
ETUDE DES FONCTIONS

I) CONCAVITE ; CONVEXITE ; POINTS D'INFLEXION

1) Activité : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2$

1. Déterminer les dérivées première et seconde de la fonction g.
2. Dresser le tableau de signe de $g''(x)$.



3. La courbe représentative de g est représentée ci-contre

Étudier graphiquement La position relative de la courbe cg par rapport à ses tangentes.

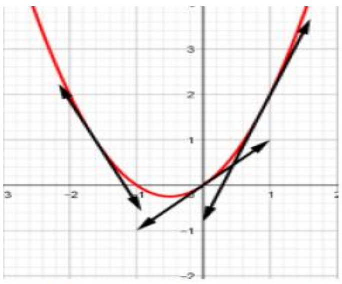
4. Que peut-on conclure ?

2) Définition et propriétés.

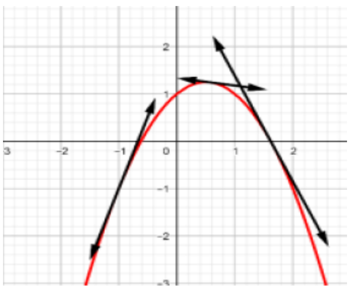
2.1 Définitions :

Définition : Soit f une fonction dont la courbe représentative est C_f.

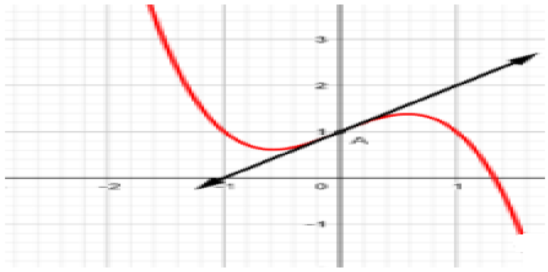
1) On dit que la courbe est convexe si elle se trouve au-dessus de toutes ses tangentes
2) On dit que la courbe est concave si elle se trouve au-dessous de toutes ses tangentes.
3) Un point d'inflexion est un point où s'opère un changement de concavité de la courbe C_f



Graphe d'une fonction convexe



Graphe d'une fonction concave



Point d'inflexion en A

Remarque : Si f est dérivable en a et C_f traverse sa tangente en A alors le point A est un point d'inflexion

2.2 Dérivée seconde et concavité.

Théorème : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

1) Si f'' est positive sur I alors C_f est convexe sur I.
2) Si f'' est négative sur I alors C_f est concave sur I.
3) Si f'' s'annule en $\boldsymbol{a}$ en changeant de signe alors C_f admet un point d'inflexion en $A(a, f(a))$

Remarque : Les conditions du théorème précèdent sont suffisantes ; on peut avoir une courbe convexe, concave ou un point D'inflexion sans l'existence même de la dérivée seconde.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3}$$

1. Déterminer les dérivées première et seconde de la fonction f.
2. Dresser le tableau de signe de f''(x).et étudier la concavité de la courbe de f et déterminer les points d'inflexions s'ils existent

Solution :1)

$$f'(x) = \left(\frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3}\right)' = \frac{1}{12}4 \times x^3 - 4x + 1 = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x + 1\right)' = x^2 - 4$$

2) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -2 ou x = 2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\left(C_f\right)$ est convexe sur $\left]-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right[$

$\left(C_f\right)$ est concave sur $\left[-2,2\right]$ et $A\left(1,f\left(1\right)\right)$ et $B\left(-1,f\left(-1\right)\right)$ sont les points d'inflexions de $\left(C_f\right)$

Exercice1 : Soit la fonction f définie sur $I=\left[0;\pi\right]$ par : $f\left(x\right)=\sin^2 x$ Étudier la concavité de la courbe de f et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur I

Solution : $\forall x\in\left[0;\pi\right]$

$$f'\left(x\right)=\left(\sin^2 x\right)'=2\left(\sin x\right)'\left(\sin x\right)^{2-1}=2\cos x\sin x$$

$$f'\left(x\right)=\sin 2x\Rightarrow f''\left(x\right)=2\cos 2x\quad \forall x\in\left[0;\pi\right]$$

$$f''\left(x\right)=0\Leftrightarrow \cos 2x=0\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$$

Et $k\in\mathbb{Z}$ donc les solutions sont : $x=\frac{\pi}{4}$ et $x=\frac{3\pi}{4}$

$$x\in\left[0;\pi\right]\Rightarrow 2x\in\left[0;2\pi\right]$$

$2x$	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos 2x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\left(C_f\right)$ est convexe sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$

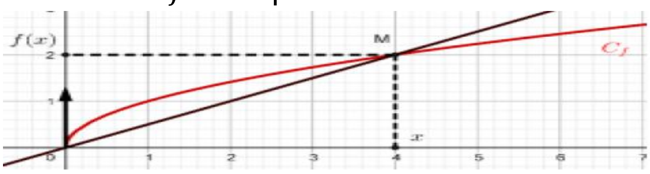
$\left(C_f\right)$ est concave sur $\left[\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ et $A\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$ et $B\left(\frac{3\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$ sont les points d'inflexions de $\left(C_f\right)$

II) DEMI-TANGENTE VERTICALE

Introduction : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}+$ par : $(\forall x\in\mathbb{R}+)$ $f\left(x\right)=\sqrt{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

La fonction f n'est pas dérivable à droite de 0.



Soient $x\neq 0$ et $M(x,f(x))$ un point de la courbe C_f la droite(OM) à pour coefficient directeur $m=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ donc elle a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(1;\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et le vecteur $\vec{v}\left(\sqrt{x};1\right)$) est aussi vecteur directeur de la droite (OM) si on fait tendre x vers 0 (à droite) La droite (OM) "tend" pour une position limite vers une droite (T) de vecteur directeur $\vec{j}\left(0;1\right)$ Donc sera parallèle à l'axe (Oy).

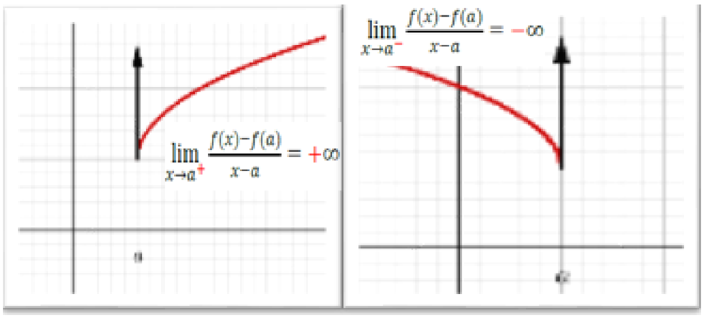
Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a,\ a+r[$

Si $\boldsymbol{f}$ est continue à droite de a et

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a}=\pm\infty$$

Alors la courbe Cf admet une demi-tangente verticale à droite de a.

Interprétation géométriques



Exemple : Soit f la fonction définie par : $f\left(x\right)=x^2\sqrt{1+x}$

1. étudier la dérivabilité de f a droite en $x_0=-1$.
2. donner une interprétation géométrique

Solution : $D_f=\left[-1,+\infty\right[$

1) $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(-1\right)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x^2\sqrt{1+x}-0}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x^2\sqrt{1+x}}{x+1}$

$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2\left(\sqrt{1+x}\right)^2}{\left(x+1\right)\sqrt{1+x}}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2\left(1+x\right)}{\left(x+1\right)\sqrt{1+x}}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Donc f n'est pas dérivable a droite en $x_0=-1$.

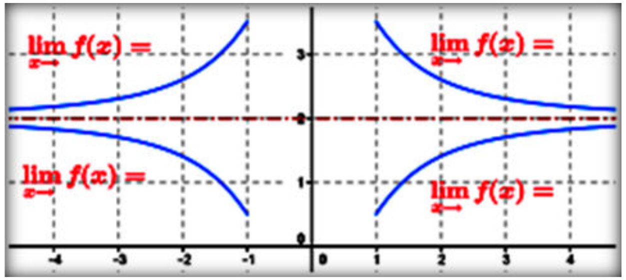
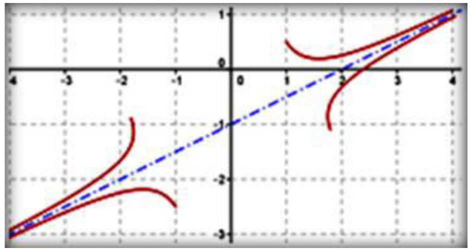
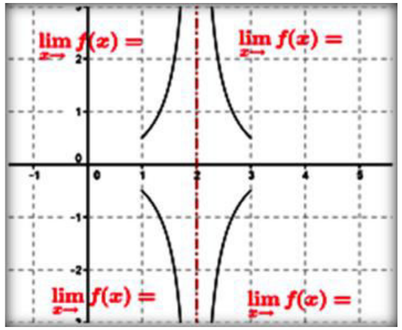
2)Interprétation géométrique :

La courbe Cf admet une demi-tangente verticale à droite du point $A\left(-1;f\left(-1\right)\right)$ dirigée vers le haut

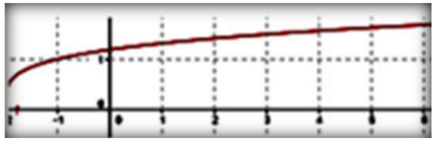
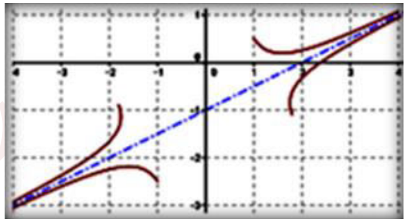
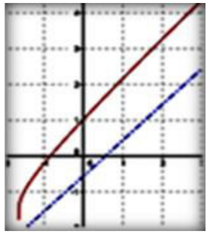
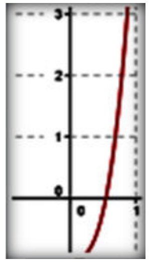
Car : $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(-1\right)}{x+1}=+\infty$ $(+\times+=+)$

III)BRANCHES INFINIES.

II) BRANCHES INFINIES.

Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$	**Si :** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$	**Si :** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$
 **La droite (Δ) d'équation $y=b$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de ∞**	**La droite $(\Delta): y=ax+b$ est une Asymptôte oblique à (C_f) signifie que : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$**  **(C_f) est au dessus de $(\Delta) \Leftrightarrow \left(f(x)-(ax+b)\right)>0$** **$(C_f)$ est en dessous de $(\Delta) \Leftrightarrow \left(f(x)-(ax+b)\right)<0$**	 **La droite (Δ) d'équation $x=a$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de a**

Détermination de la nature de la branche infinie dans le cas : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$

Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0$	**Si :** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a\neq 0$		**Si :** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$
	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-ax\right)=b$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-ax\right)=\infty$	
 **La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (Ox)**	 **La droite (Δ) d'équation $y=ax+b$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de ∞ .**	 **La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (D), d'équation $y=ax$**	 **La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (Oy)**

Exemples :

Exemple1 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{2x-1}{3x-6}$$

déterminer les limites aux bornes de D_f et (Donner une interprétation géométrique des résultats)

Solution : $D_f=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

1) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{2x-1}{3x-6}$

$\lim\limits_{x\to2^+} 2x-1=3$ **et** $\lim\limits_{x\to2^+} 3x-6=0^+$ **et** $\lim\limits_{x\to2^-} 3x-6=0^-$

x	$-\infty$ $\quad 2 \quad$ $+\infty$
$3x-6$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

Donc : $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty$

Interprétation géométrique des résultats :

La droite (Δ): $x=2$ est une asymptote vertical a la courbe C_f

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{3x-6}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{3x-6}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$

Interprétation géométrique des résultats :

La droite (Δ): $y=\frac{2}{3}$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f

Exemple2 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

On a : $f(x)=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=1$$

($|x|=x$ car $x\to+\infty$)

La droite (Δ): $y=1$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=-1$$

La droite (Δ'): $y=-1$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

Exemple3 : : Soit f la fonction définie par :

$\forall x\in\mathbb{R}^*$: $f(x)=2+\frac{x-1}{x^2}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ car :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

Donc : La droite (Δ): $y=2$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de ∞

étudions la position de courbe (C_f) et la droite (Δ) ?

$f(x)-2=\frac{x-1}{x^2}$ le signe et celui de $x-1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)-2$	$-$	‖	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$	

Donc la courbe C_f est au-dessous de (Δ): $y=2$

Sur l'intervalle $]-\infty;0[\cup]0;1[$ et la courbe C_f est au-dessus de (Δ): $y=2$ Sur l'intervalle $]1;+\infty[$

C_f coupe (Δ) au point $I(1;2)$

Exemple4: Soit f la fonction définie par :

$\forall x\in\mathbb{R}^*-\{3\}$: $f(x)=2x-1+\frac{1}{x-3}$

montrer que la courbe C_f que la fonction f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ que l'on déterminera

Solution $f(x)=2x-1+\frac{1}{x-3}\Leftrightarrow f(x)-(2x-1)=\frac{1}{x-3}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-3}=\frac{1}{+\infty}=0$

Donc : la droite (Δ): $y=2x-1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(2x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-3}=0$

Donc : la droite (Δ): $y=2x-1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

Exemple5 : Soit la fonction définie par :

$f(x)=\sqrt{x}$ étudier les branches paraboliques au voisinage de $+\infty$

Solution : On a : Df = ℝ+ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Donc la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe $(\boldsymbol{Ox})$ au voisinage de +∞

Exemple6 : Soit la fonction définie par :

$f(x) = x^3$ étudier les branches paraboliques au voisinage de $+\infty$

Solution : On a : Df = ℝ+ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

Donc la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe $(\boldsymbol{O}y)$ au voisinage de +∞

Exemple7: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$f(x) = x + \sqrt{x}$

Solution : On a : Df = ℝ+ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$

Mais $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 1x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Donc la courbe de la fonction admet une branche parabolique vers la droite $(\boldsymbol{\Delta})$: $\boldsymbol{y = x}$.

Propriété : Soit f une fonction définie au voisinage de +∞. La droite (Δ): $y = ax + b$ ($a \neq 0$) est une asymptote oblique
au voisinage de +∞ si et seulement si :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (a \neq 0) \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$$

Preuve : D'après la propriété précédente : On peut écrire $f(x) = ax + b + h(x)$ où $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax+b+h(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} a + \frac{b}{x} + \frac{h(x)}{x} = a$$

D'autre part : $f(x) - ax = b + h(x)$ $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$

donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$

Exemple: Soit f la fonction définie par :

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$

1)Déterminer D_f

2) montrer que la courbe C_f que la fonction f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ que l'on déterminera

Solution :1) On a : $x^2+1 \succ 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc $D_f = \mathbb{R}$

2)a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$

Et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$ $|x| = x$ car $x \to +\infty$

$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1 = a$

Et on a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 1x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

Donc : la droite (Δ): $y = 1x$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

b)De même on a :

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$

Et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$ $|x| = -x$ car $x \to -\infty$

$= \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1 = a$

Et on a : $\lim_{x\to-\infty} f(x) + 1x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} + x$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$$

Donc : la droite (Δ): $y = -x$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

IV) LES ELEMENTS DE SYMETRIE D'UNE COURBE.

1) Axe de symétrie :

Activité : Soit la fonction

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{2x^2 - 4x - 6}$

1. Déterminer D_f ensemble de définition de la fonction f.
2. Montrer que $(\forall x \in D_f)$ $(2 - x \in D_f)$
3. Montrer que $(\forall x \in D_f)$ $(f(2 - x) = f(x))$

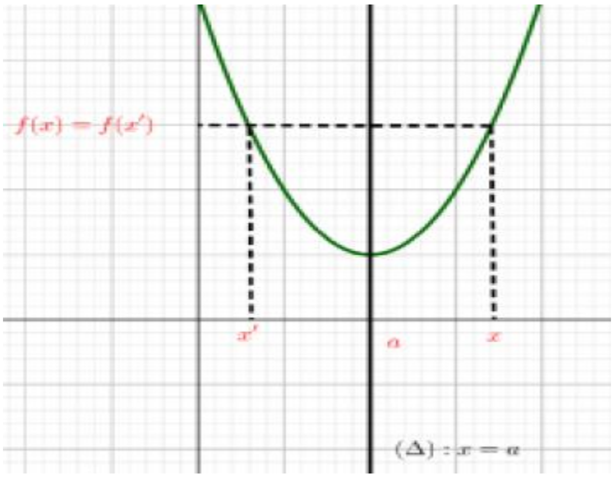
Propriété : Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f.

La droite (Δ): $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe C_f si et seulement si :

a)$(\forall x \in D_f)(2a - x \in D_f)$

b)$(\forall x \in D_f)(f(2a - x) = f(x))$

Preuve : Soit x un élément de D_f et $A(x, 0)$, si $A'(x', 0)$ est le symétrique



de A par rapport à (Δ) $x = a$ alors

$\frac{x + x'}{2} = a$ (a est le centre de l'intervalle de bornes x et x')

d'où : $x' = 2a - x$ et puisque $(\Delta) \perp (AA')$ alors $f(x) = f(x')$ ce que signifie : $f(2a - x) = f(x)$

Exemple: Soit f la fonction définie par :

$f(x) = \sqrt{x - x^2}$

1)Déterminer D_f

2) montrer que la La droite (Δ): $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Solution :1) On a : $f(x) = \sqrt{x - x^2}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - x^2 \geq 0\}$

$x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 ou x = 0$

Tableau de signe :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

donc : $D_f = [0,1]$

2)a) montrons que : si $x \in D_f = [0,1]$ alors $1 - x \in D_f$?

$x \in D_f = [0,1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow 1 - 1 \leq 1 - x \leq 1$

Donc : $x \in D_f \Rightarrow 0 \leq 1 - x \leq 1 \Rightarrow 1 - x \in D_f$

b) montrons que : $f(1 - x) = f(x)$????

$f(1 - x) = \sqrt{(1 - x) - (1 - x)^2} = \sqrt{1 - x - (1 - 2x + x^2)}$

$= \sqrt{1 - x - 1 + 2x - x^2} = \sqrt{x - x^2} = f(x)$

Donc : La droite (Δ): $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Exercice2: Soit f la fonction définie par :

$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

montrer que la La droite (Δ): $x = \frac{1}{3}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Solution : On a : $D_f = \mathbb{R}$

a) si $x \in D_f = \mathbb{R}$ alors $\frac{2}{3} - x \in \mathbb{R}$

b) montrons que : $f\left(\frac{2}{3} - x\right) = f(x)$????

$f\left(\frac{2}{3} - x\right) = 3\left(\frac{2}{3} - x\right)^2 - 2\left(\frac{2}{3} - x\right) + 5$

$= 3x^2 - 2x + 5 = f(x)$

Donc : La droite (Δ): $x = \frac{1}{3}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Exercice3: Soit f la fonction définie par :

$f(x) = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x - 3}$

montrer que la La droite (Δ): $x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Solution : On a : $D_f = \mathbb{R} - \{1;3\}$

a) si $x \in \mathbb{R} - \{1;3\}$ alors $4 - x \in \mathbb{R} - \{1;3\}$ en effet :

$x \in \mathbb{R} - \{1;3\} \Rightarrow x \neq 1$ et $x \neq 3$

$\Rightarrow -x\neq -1$ et $-x\neq -3 \Rightarrow 4-x\neq 4-1$ et $4-x\neq 4-3$

$\Rightarrow 4-x\neq 3$ et $4-x\neq 1$ alors $4-x\in\mathbb{R}-\{1;3\}$

b) montrons que : $f(4-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}-\{1;3\}$????

$$f(4-x)=\frac{1}{4-x-1}-\frac{1}{4-x-3}=\frac{1}{3-x}-\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}$$

donc $f(4-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}-\{1;3\}$

donc la droite (Δ): $x=2$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Exercice4: Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\cos x$

montrer que la La droite (Δ): $x=k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Solution : On a : $D_f=\mathbb{R}$

a) si $x\in\mathbb{R}$ alors $2k\pi-x\in\mathbb{R}$

b) montrons que : $f(2k\pi-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$????

$$f(2k\pi-x)=\cos(2k\pi-x)=\cos(-x)=\cos x$$

donc $f(2k\pi-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$

donc la droite (Δ): $x=k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

2) Centre de symétrie.

Propriété : Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f.
Le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de la courbe Cf si et seulement si :

a) $(\forall x\in D_f)(2a-x\in D_f)$

b) $(\forall x\in D_f)(f(2a-x)=2b-f(x))$

Preuve : $\Omega(a, b)$ étant centre de symétrie de la courbe C_f, si $M(x, f(x))$ est un point de Cf alors sont symétrique M' par rapport à Ω est un point de C_f. soit $M'(x', f'(x))$ on a : $\frac{x+x'}{2}=a$

et $\frac{f(x)+f(x')}{2}=2b$

car a est le centre de l'intervalles de bornes x et x' et b est le centre de L'intervalles de bornes $f(x)$ et $f(x')$ Par suite : $x'=2a-x$ et $f(x')=2b-f(x)$

et finalement : $f(2a-x)=2b-f(x)$

Exemple: Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{x^2-x}{x+1}$$

1) montrer que : $\forall\in D_f$: $f(x)=x-2+\frac{2}{x+1}$

2)montrer que le point $\Omega(-1;-3)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Solution : 1) On a : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$$x-2+\frac{2}{x+1}=\frac{(x-2)(x+1)+2}{x+1}=\frac{x^2-x}{x+1}=f(x)$$

2)a) montrons que si $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ alors $-2-x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ en effet :

$x\in\mathbb{R}-\{-1\}\Leftrightarrow x\neq -1\Leftrightarrow -x\neq 1\Leftrightarrow -2-x\neq -2+1$

$\Leftrightarrow -2-x\neq -1\Leftrightarrow -2-x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

b) montrons que : $f(-2-x)+f(x)=-6=2b$??

$$f(-2-x)+f(x)=-2-x-2+\frac{2}{-2-x+1}+x-2+\frac{2}{x+1}$$

$$=-6+\frac{2}{-x-1}+\frac{2}{x+1}=-6-\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x+1}=-6$$

donc $f(-2-x)+f(x)=-6=2b\ \forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

donc le point $\Omega(-1;-3)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Exercice5 : Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\sin x-\cos x$

montrer que le point $\Omega\left(\frac{\pi}{4};0\right)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Solution :

a) on a si $x\in\mathbb{R}$ alors $2\frac{\pi}{4}-x=\frac{\pi}{2}-x\in\mathbb{R}$

b) montrons que : $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\times 0-f(x)$??

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x-\sin x$$

donc $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\times 0-f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$

donc le point $\Omega\left(\frac{\pi}{4};0\right)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Exercice6 : Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\sqrt{4x^2+2x-2}$

1)Déterminer D_f

2) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$

3) calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

4) montrer que la courbe C_f que la fonction f admet une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ que l'on déterminera

Solution : 1) $D_f = \left\{x\in\mathbb{R} / 4x^2+2x-2\geq 0\right\}$

$4x^2+2x-2=0 \Leftrightarrow 2x^2+x-1=0$

$\Delta = b^2-4ac=(1)^2-4\times2\times(-1)=1+8=9=(3)^2>0$

$x_1=\frac{-1+3}{2\times2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ **et** $x_2=\frac{-4}{4}=-1$

x	$-\infty$		-1		$1/2$		$+\infty$
$4x^2+2x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

$4x^2+2x-2\succ 0 \Leftrightarrow \forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

Donc :

$$f'(x)=\left(\sqrt{4x^2+2x-2}\right)'=\frac{\left(4x^2+2x-2\right)'}{2\sqrt{4x^2+2x-2}}=\frac{8x+2}{2\sqrt{4x^2+2x-2}}$$

$$f'(x)=\frac{4x+1}{\sqrt{4x^2+2x-2}}\quad \forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$$

3) calculons : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+2x-2}$

On a: $\lim_{x\to-\infty} 4x^2+2x-2=\lim_{x\to-\infty}4x^2=+\infty$

Donc : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x-2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{2x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)}}{x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}$ $x\to-\infty$ donc $|x|=-x$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}=-\sqrt{4}=-2=a$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)+2x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+2x-2}+2x=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+2x-2}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+2x-2}-2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+2x-2}-2x\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+2x-2-4x^2}{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}+2\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{-\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}+2\right)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}=b$$

Donc : donc la droite $y=-2x-\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ a la courbe C_f

Exercice7 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-3x+3$

1) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

2) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

3) dresser le tableaux de variation de f

4) Étudier la concavité de la courbe de (C_f)et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur $\mathbb{R}$

5)montrer que le point $I(0;3)$ est un centre de symétrie de(C_f) et déterminer l'équation de la tangente (T) a la courbe (C_f)en $I(0;3)$

6) on utilisant le tableaux de variation de f monter que l'équation : $f(x)=0$ admet une solution unique α tel que : $\alpha\prec-1$ et vérifier que $-2.2\prec\alpha\prec-2.1$ et déterminer le signe de $f(x)$

7) Tracer la courbe Cf et discuter suivant les valeurs du paramètre m le nombre de solutions de l'équation : $x^3-3x+3=m$

Solution : 1) On a : $D_f=\mathbb{R}=\left]-\infty;+\infty\right[$ car f est une fonction polynôme

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^3-3x+3=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^3-3x+3=\lim_{x\to+\infty}x^3=-\infty$

2) étude des branches infinies de la courbe (C_f):

$\frac{f(x)}{x}=\frac{x^3-3x+3}{x}=x^2-3+\frac{3}{x}\quad\forall\in\mathbb{R}^*$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^2-3+\frac{3}{x}=+\infty$

Et $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^2-3+\frac{3}{x}=+\infty$

Donc la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe ($\boldsymbol{O}$y) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

3) le tableaux de variation de f ?

$\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x)=\left(x^3-3x+3\right)'=3x^2-3=3\left(x^2-1\right)=3(x-1)(x+1)$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4) Étude de la concavité de la courbe de $\left(C_f\right)$?

$\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x)=3\left(x^2-1\right)$ donc : $f''(x)=6x$

le tableaux de signe de $f''(x)$ est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Donc :$\left(C_f\right)$est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

$\left(C_f\right)$est concave sur $\mathbb{R}_-^*$ et $f''(x)$ s'annule en changeant de signe 0 donc $I(0,3)$ est un point d'inflexion de $\left(C_f\right)$

5)montrons que le point $I(0;3)$ est un centre de symétrie de$\left(C_f\right)$?

a) on a si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\times 0-x=-x\in\mathbb{R}$

b) montrons que : $f(-x)=2\times 3-f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$?

$f(-x)=(-x)^3-3(-x)+3=-x^3+3x+3$

$2\times 3-f(x)=6-f(x)=6-\left(x^3-3x+3\right)=-x^3+3x+3$

donc $f(-x)=2\times 3-f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$ donc le point $I(0,3)$ est un centre de symétrie de$\left(C_f\right)$

l'équation de la tangente (T) a la courbe $\left(C_f\right)$en $I(0;3)$ est : $(T): y=f'(0)x+f(0)=-3x+3$

6) du tableaux de variation de f

On deduit que f admet une valeur minimal en 1 sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ et c'est : $f(1)=1$

Donc : $f(x)\geq f(1)=1 \quad \forall x\in[-1;+\infty[$

Et l'image de l'intervalle $]-\infty;-1]$par f est l'intervalle $]-\infty;5]$ et $0\in]-\infty;5]$ donc il existe un α de $]-\infty;-1]$ tel que $f(\alpha)=0$ et puisque f est strictement croissante sur $]-\infty;-1]$ alors quelque soit $x\neq\alpha$ on a $x\prec\alpha$ ou $\alpha\prec x\prec -1$ donc $f(x)\prec f(\alpha)$ ou $f(\alpha)\prec f(x)\prec f(-1)$

Donc : $f(x)\prec 0$ ou $0\prec f(x)\leq 5$

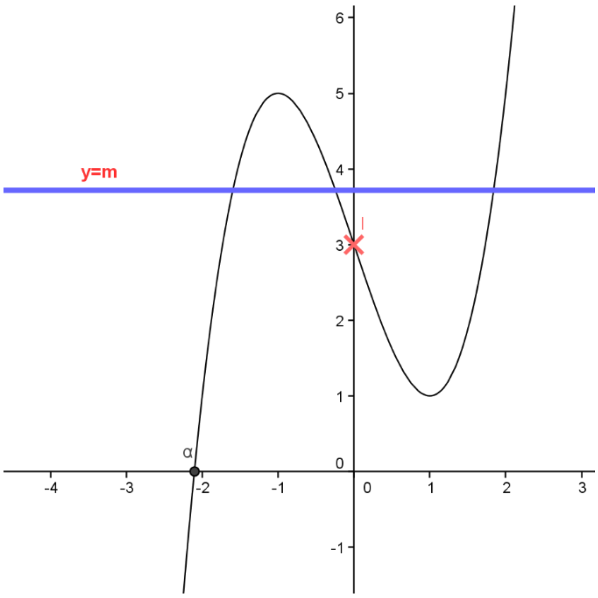
Donc : $\forall x\in]-\infty;-1]-\{\alpha\}$ on a $f(x)\neq 0$ donc α est unique et on utilisant la calculatrice en vérifie que : $f(-2.2)\approx -1.04$ et $f(-2.1)\approx 0.03$

Donc d'après l'étude précèdent on a alors : $-2.2\prec\alpha\prec -2.1$

On deduit que : $f(x)\succ 0 \ \forall x\in]\alpha;+\infty]$ et

$f(x)\prec 0 \quad \forall x\in]-\infty;\alpha]$

7) Tracer la courbe Cf



Remarque : le signe de $f(x)$ partir de $\left(C_f\right)$?

a)sur $]-\infty;\alpha]$ $f(x)\leq 0$ car $\left(C_f\right)$est au-dessous de l'axe des abscisses

b)sur $]\alpha;+\infty]$ $f(x)\geq 0$ car $\left(C_f\right)$est au-dessus de l'axe des abscisses

7) $x^3-3x+3=m \Leftrightarrow f(x)=m$

Les solutions de l'équation : $f(x)=m$ sont les abscisses des points d'intersections de $\left(C_f\right)$ avec la droite d'équation : $y=m$

m	$m\in]5;+\infty[\cup]-\infty;1[$	$m=1$ou $m=5$	$m\in]1;5[$
nombre de solutions	1	2	3

Exercice8 : soit f une fonction définie par :

$f(x)=2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

3) étudier la position de courbe (C_f) avec son asymptote horizontal

4) étudier les variations de f et dresser le tableaux de variation de f

5) déterminer les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses f

6) montrer que la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (C_f)

7) tracer la courbe (C_f)

Solution : 1) $x\in D_f \Leftrightarrow x\neq 0$ et $x\neq 1$

donc : $D_f=]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$

2) étude des branches infinies de la courbe (C_f)

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=2$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=2$

Car : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=0$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$

La droite (Δ): $y=2$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de $\pm\infty$

b) on a $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ et

$\lim_{x\to0} 2-\frac{1}{x-1}=3$

donc $\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

donc La droite (Δ'): $x=0$ est une asymptote a la courbe C_f

c) on a $\lim_{x\to1^+}\frac{-1}{x-1}=-\infty$ et $\lim_{x\to1^-}\frac{-1}{x-1}=+\infty$

et $\lim_{x\to1} 2+\frac{1}{x}=3$

donc $\lim_{x\to1^+} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to1^-} f(x)=+\infty$

donc La droite (Δ ''): $x=1$ est une asymptote a la courbe C_f

3) étude de la position de courbe (C_f) avec son asymptote horizontal : $(\forall x\in D_f)$

$f(x)-2=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-x}{x(x-1)}=\frac{-1}{x(x-1)}$

si $x\in]0;1[$ alors $f(x)-2\succ 0$

Donc la courbe C_f est au- dessus de (Δ): $y=2$

si $x\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ alors $f(x)-2\prec 0$

Donc la courbe C_f est au-dessous de (Δ): $y=2$

5) déterminons les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses : $(\forall x\in D_f)$

$f(x)=0\Leftrightarrow 2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=0\Leftrightarrow\frac{2x^2-x-1}{x(x-1)}=0$

$2x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ou $x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Donc les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses sont : $A\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};0\right)$ et $B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};0\right)$

6) montrons que la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (C_f) :

On a : $D_f=]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$

a) si $x\in D_f$ alors $1-x\in D_f$ en effet :

$x\in\mathbb{R}-\{0;1\}\Rightarrow x\neq0$ et $x\neq1$

$\Rightarrow -x\neq0$ et $-x\neq-1\Rightarrow 1-x\neq1$ et $1-x\neq0$

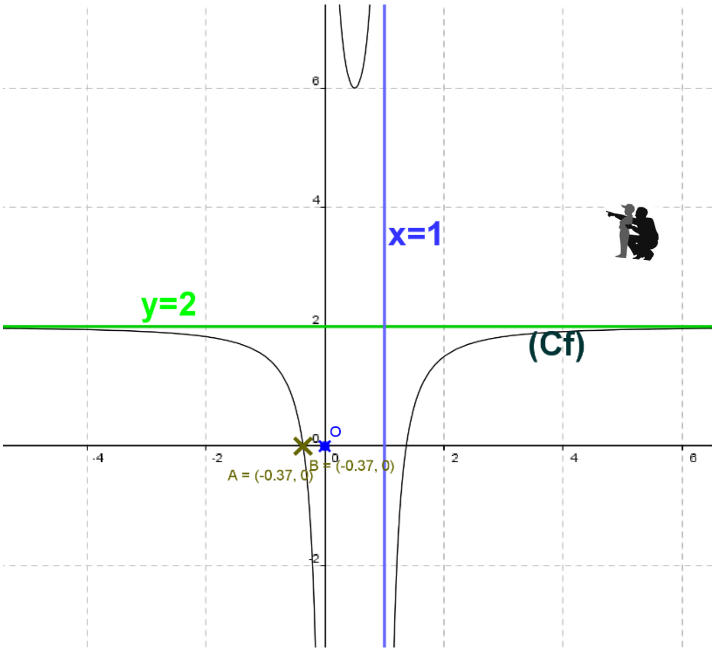
alors $1-x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$

b) montrons que : $f(1-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$????

$f(1-x)=2+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x-1}=2+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}=2-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}$

donc $f(1-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$

donc la droite $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f



Exercice9 : soit f une fonction définie par :

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-3}$$

1) déterminer les limites aux bornes de D_f

2)déterminer les réels a et b tel que :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3} \quad \forall x\in D_f$$

3) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

4) étudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f

5) montrer que le point $\Omega(3;4)$ est un centre de symétrie de (C_f)

6) calculer $f''(x)$ $\forall x\in D_f$ et étudier la concavité de la courbe de f

7) étudier la position de courbe (C_f) et son asymptote oblique (Δ)

8) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repére

9) déterminer l'équation de la tangente (T) a la courbe (C_f) en $x_0=2$

9) tracer la courbe (C_f)

Solution : 1) $x\in D_f \Leftrightarrow x\neq 3$

donc : $D_f=\mathbb{R}-\{3\}=]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-2x+1}{x-3}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-2x+1}{x-3}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to -\infty} x=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to +\infty} x=+\infty$$

2)on fait la division euclidienne de x^2-3x+6 par $x-3$ on trouve : $x^2-2x+1=(x-3)(x+1)+4$

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-3}=\frac{(x-3)(x+1)+4}{x-3}=x+1+\frac{4}{x-3}$$

Donc : $a=1$ et $b=1$ et $c=4$

3)Les branches infinies de la courbe (C_f)

a) $\lim_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$

donc La droite $x=3$ est une asymptote a la courbe C_f

b) $\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

on a : $f(x)=x+1+\frac{4}{x-3} \Leftrightarrow f(x)-(x+1)=\frac{4}{x-3}$

c) $\lim_{x\to +\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{x\to +\infty}\frac{4}{x-3}=\frac{4}{+\infty}=0$

Donc : la droite $y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

d) $\lim_{x\to -\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{x\to -\infty}\frac{4}{x-3}=\frac{4}{-\infty}=0$

Donc : la droite $y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

4) les variations de f et le tableau de variation ?

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{3\}: f'(x)=\left(x+1+\frac{4}{x-3}\right)'=1-\frac{4}{(x-3)^2}=\frac{(x-3)^2-4}{(x-3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x-3)^2-2^2}{(x-3)^2}=\frac{(x-3-2)(x-3+2)}{(x-3)^2}=\frac{(x-5)(x-1)}{(x-3)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-5)(x-1)$

$(x-5)(x-1)=0 \Leftrightarrow x-5=0$ ou $x-1=0 \Leftrightarrow x=5$ ou $x=1$

Le tableau de signe :

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Le tableau de variation

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	8	↗	$+\infty$

5) Montrons que le point $\Omega(3;4)$ est un centre de symétrie de (C_f) ??

a) Montrons que si $x \in \mathbb{R}-\{3\}$ alors $6-x \in \mathbb{R}-\{3\}$?

$x \in \mathbb{R}-\{3\} \Leftrightarrow x \neq 3 \Leftrightarrow -x \neq -3 \Leftrightarrow 6-x \neq 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6-x \in \mathbb{R}-\{3\}$

b) Montrons que : $f(6-x)+f(x)=8=2b$?

$$f(6-x)+f(x)=6-x+1+\frac{1}{6-x-3}+x+1+\frac{1}{x-3}$$

$$=8+\frac{1}{-x+3}+\frac{1}{x-3}=8-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-3}=8$$

Donc : $\Omega(3;4)$ est un centre de symétrie de (C_f)

6) étudie la concavité de la courbe de f ?

$\forall x \in D_f$: $f'(x)=1-\frac{4}{(x-3)^2}$

Donc : $f''(x)=\frac{2(x-3)4}{(x-3)^4}=\frac{8(x-3)}{(x-3)^4}$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $x-3$

Si $x \succ 3$ (C_f) est convexe

Si $x \prec 3$ (C_f) est concave

7) $f(x)-(x+1)=\frac{4}{x-3}$

Si $x \succ 3$ alors $f(x)-(x+1) \succ 0$

Donc la courbe C_f est au- dessus de (Δ

Si $x \succ 3$ alors $f(x)-(x+1) \prec 0$

Donc la courbe C_f est au-dessous de (Δ

8) a) intersections avec l'axe des abscisses

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{x-3}=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}-\{3\}$:

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \qquad \Delta=b^2-4ac=4-4\times1\times1=0$

$x=\frac{-b}{2a}=1$ **donc** le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses est $A(1;0)$

a) intersections avec l'axe des ordonnées

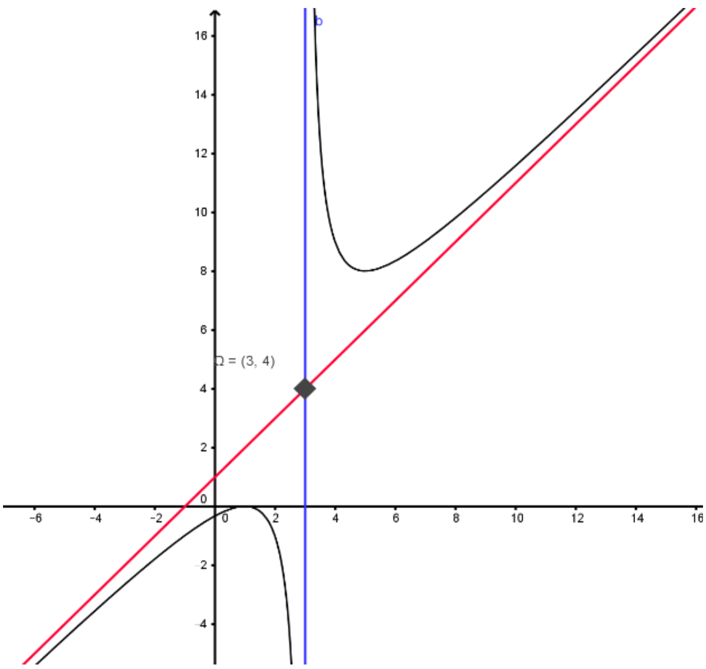
$f(0)=-\frac{1}{3}$ **donc** le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est $C\left(0;-\frac{1}{3}\right)$

9) l'équation de la tangente (T) a la courbe (C_f) en $x_0=2$ est $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$f'(2)=\frac{(2-5)(2-1)}{(2-3)^2}=\frac{-3}{1}=-3$ et $f(2)=\frac{2^2-2\times2+1}{2-3}=-1$

$y=f(2)+f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y=-1-3(x-2) \Leftrightarrow y=-3x+5$

9)La courbe (C_f) :



Exercice 10: Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$

1)Déterminer D_f

2) Déterminer les limites aux bornes de D_f

3) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

4) étudier la dérivabilité de f adroite de 2 et à gauche de -1

5) étudier les variations de f et dresser le tableaux de variation de f

6) tracer la courbe (C_f)

Solution :1) $D_f=\{x \in \mathbb{R} / x^2-x-2 \geq$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times2\times(-1)=1+8=9=(3)^2>0$

$x_1=-1$ **et** $x_2=2$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=]-\infty;-1]\cup[2;+\infty[$

2) on a : $\forall x \in D_f-\{0\}$

$$f(x)=\sqrt{x^2-x-2}=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}$$

Et puisque : $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$ et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$

Alors : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3) étude des branches infinies de la courbe $\left(C_f\right)$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x-2}+x\right)\left(\sqrt{x^2-x-2}-x\right)}{\sqrt{x^2-x-2}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-2}{\sqrt{x^2-x-2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}$$

Donc : la droite $y=x-\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x-2}+x\right)\left(\sqrt{x^2-x-2}-x\right)}{\sqrt{x^2-x-2}-x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-2}{\sqrt{x^2-x-2}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1-\frac{2}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-1}=\frac{1}{2}$$

Donc : la droite $y=-x+\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

4) étudie de la dérivabilité de f adroite de 2 et à gauche de -1

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-x-2}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x-2}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x-2}}=+\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 2 et à gauche de -1

Alors la courbe Cf admet une demi-tangente verticale aux points $A(-1.0)$ et $B(2.0)$

5) étude des variations de f et le tableaux de variation de f ?

$x^2-x-2\succ0\Leftrightarrow\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

Donc :

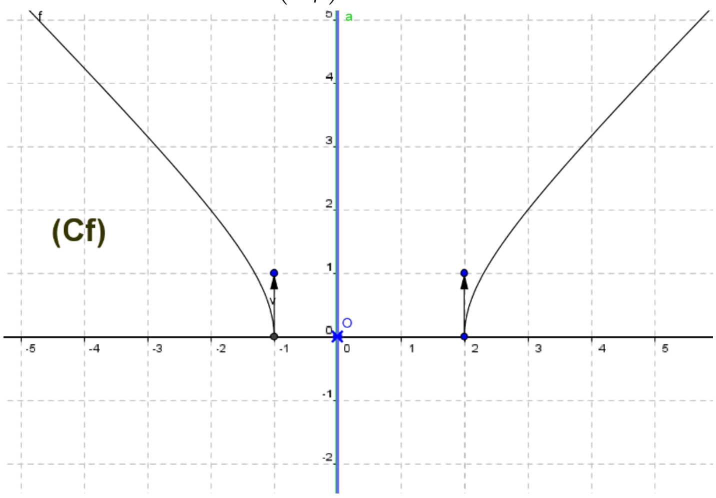
$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)'=\frac{\left(x^2-x-2\right)'}{2\sqrt{x^2-x-2}}=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$$

$$f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}\quad\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de : $2x-1$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

6) tracer la courbe $\left(C_f\right)$



Exercice11: soit f une fonction définie par :

$$f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) montrer que f est périodique de période $T=\pi$ et en déduire le domaine d'étude de f

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f

4) tracer la courbe $\left(C_f\right)$ sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$

Solution :

1) $D_f=\mathbb{R}$

2)a)si $x\in\mathbb{R}$ alors $\pi+x\in\mathbb{R}$

b)

$$f(\pi+x)=2\cos\left(2(\pi+x)+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(2x+2\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(\pi+x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$$

Donc : f est périodique de période $T=\pi$

<u>Remarque :</u> la fonction : $x\to\cos(ax+b)$ est périodique de période $T=\frac{2\pi}{|a|}$ si $a\neq0$

<u>Un domaine d'étude de f</u>

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T=\pi$

donc par exemple : $D_E=[0;\pi]$

3) $f'(x)$ et le tableaux de variation de f ?

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$ on a :

$$f'(x)=2\times-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-4\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E=[0;\pi]$

$$x\in[0;\pi]\Leftrightarrow 0\le x\le\pi\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{9\pi}{4}$$

On utilisant le cercle trigo en deduit le signe de $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

Le tableau de signe de $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ est :

$2x+\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$		π		2π		$\frac{9\pi}{4}$
$\sin(2x+\frac{\pi}{4})$		$+$	0	$-$	0	$+$	

le tableau de variation de f :

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{8}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$

4) du tableau de variation de f :on deduit que Que f change de signe en sur les intervalles $\left[0;\frac{3\pi}{8}\right]$ et $\left[\frac{3\pi}{8};\frac{7\pi}{8}\right]$ cad (C_f) coupe l'axe des abscisses

On va résoudre dans $I=\left[0;\frac{7\pi}{8}\right]$ l'équation :

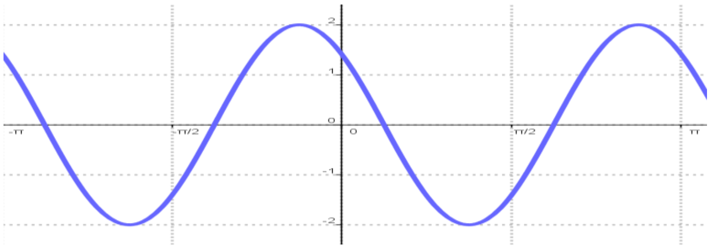
$f(x)=0$

On a : $\begin{cases} f(x)=0 \\ x\in I\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ \frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{9\pi}{4}\end{cases}$

$$\begin{cases}2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} ou 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2} \\ x\in I\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8} ou. x=\frac{5\pi}{8}$$

On trace la courbe (C_f) sur l'intervalle $D_E=[0;\pi]$

Et on deduit le reste par les translations de vecteurs $k\pi\vec{i}$ $k\in\mathbb{Z}$



Exercice12: soit f une fonction définie par :

$f(x)=4\sin x+\cos 2x$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) montrer que f est périodique de période $T=2\pi$ et en déduire le domaine d'étude de f

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f

4)donner l'équation de la tangente (T) a la courbe de f en en $x_0=0$

5) calculer $f''(x)$ en fonction de $\sin x$

6)déterminer les points d'inflexions de la courbe (C_f)

7) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi;4\pi]$

Solution : 1) $D_f=\mathbb{R}$

2)a)si $x\in\mathbb{R}$ alors $2\pi+x\in\mathbb{R}$

b) $f(2\pi+x)=4\sin(x+2\pi)+\cos(2(x+2\pi))$

$f(2\pi+x)=4\sin x+\cos(2x)=f(x)$

Donc : f est périodique de période $T=2\pi$

<u>Un domaine d'étude de f</u>

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T=2\pi$

donc par exemple : $D_E=[0;2\pi]$

f est dérivable sur $D_E=[0;2\pi]$ et $\forall x\in D_E$ on a :

$$f'(x)=4\cos x-2\sin(2x)=4\cos x-4\cos x\sin x$$

$$f'(x)=4\cos x(1-\sin x)$$

Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E=[0;2\pi]$

On a : $1-\sin x\ge 0$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\cos x(1-\sin x)=0\Leftrightarrow\cos x=0.ou.1-\sin x=0$$

$1-\sin x=0\Leftrightarrow\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$ Donc :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	1

4) l'équation de la tangente (T) a la courbe de f en en $x_0 = 0$ est : $y = f(0) + f'(0)(x-0)$

Avec : $f'(0) = 4$ et $f(0) = 1$ donc : $y = 4x+1$

5) calcule de $f''(x)$ en fonction de $\sin x$:

On a $f'(x) = 4\cos x - 2\sin(2x)$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = -4\sin x - 4\cos(2x) = -4\sin x - 4(1-2\sin^2 x)$

$f''(x) = 8\sin^2 x - 4\sin x - 4 = 4(\sin^2 x - \sin x - 1)$

Etude du signe de $f''(x)$ sur $D_E = [0;2\pi]$

On pose : $X = \sin x$ donc : $X \in [-1;1]$ et l'équation $\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ devient : $X^2 - X - 1 = 0$

$\Delta = 9$ les solutions sont : $X_1 = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = 1$

Donc : $f''(x) = 8(\sin x - 1)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)$

On a : $\sin x - 1 \le 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En utilisant le cercle trigo en deduit que :

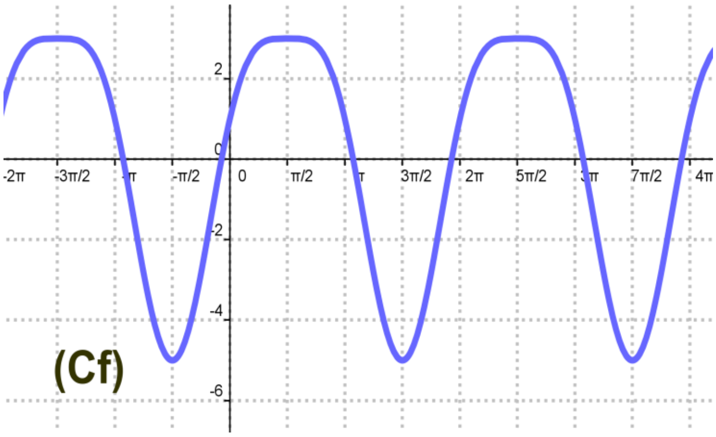
$\sin x + \frac{1}{2} \le 0 \Leftrightarrow \sin x \le -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right]$

x	0		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : (C_f) est convexe sur $\left[\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right]$

(C_f) est concave sur $\left[0,\frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6};2\pi\right]$ et $A\left(\frac{7\pi}{6},-\frac{3}{2}\right)$ et $B\left(\frac{11\pi}{6},-\frac{3}{2}\right)$ sont les points d'inflexions de (C_f)

7) La courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi;4\pi]$



Exercice13: soit f une fonction définie par :

$f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0;\pi]$

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f

4) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$ car $2+\cos x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) <u>Un domaine d'étude de</u> f

a)si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\pi + x \in \mathbb{R}$

) $f(2\pi + x) = \frac{\sin(2\pi + x)}{2+\cos(2\pi + x)} = \frac{\sin x}{2+\cos x} = f(x)$

Donc : f est périodique de période $T = 2\pi$

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T = 2\pi$ donc par exemple : $D = [-\pi;\pi]$

Etudions la parité de f ?

$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{2+\cos x} = -f(x)$

Donc f est impair

Donc il suffit d'étudier f sur $D_E = [0;\pi]$

3) f est dérivable sur $D_E = [0;\pi]$ et $\forall x \in D_E$ on a :

$f'(x) = \frac{\cos x(2+\cos x) + \sin x \times \sin x}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}$

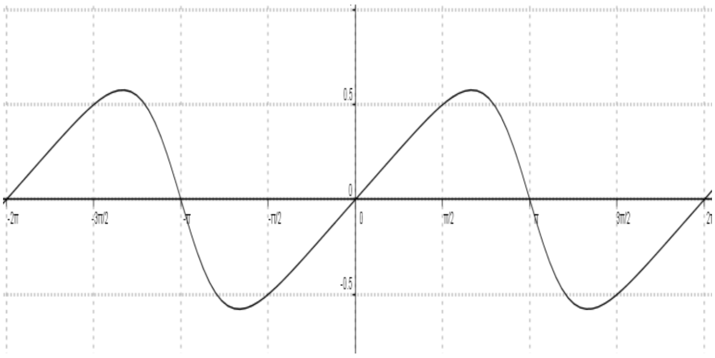
Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E = [0;\pi]$

Le signe de $f'(x)$ est celui de : $2\cos x + 1$

$2\cos x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow \cos x \ge -\frac{1}{2}$ Et $x \in [0;\pi]$ Donc :

$2\cos x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \in \left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow 0$



Autre exercices

Exercice1 : Soit f la fonction définie par :

$f(x)=2x^2+2x-1$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.
3. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

Exercice2 : Soit g la fonction définie par :

$$g(x)=\frac{2x^2-x}{x-1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g.
2. Déterminer les limites aux bornes de D_g
3. Effectuer la division de $P(x) = 2x^2 - x$ sur $(x - 1)$

puis en déduire que $(\forall x \in Dg)$ $g(x)=2x+1+\frac{1}{x-1}$

4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)-(2x+1)$

On dit que la droite (Δ): $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

Exercice3 : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de h et étudier sa parité.
2. Etudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$
3. Déterminer la fonction dérivée de la fonction h et dresser le T.V
4. Déterminer l'équation de la tangente en $O(0,0)$
5. Etudier les positions relatives de T et la courbe
6. Tracer la courbe Cf

Exercice4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - E(x)$

1. Tracer la courbe de la fonction f sur $[0,2[$.
2. Etudier la limite $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$
3. Que remarquer vous ?

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien