LOGIQUE ET RAISONNEMENTS

Quelques motivations

• Il est important d'avoir un langage rigoureux. La langue française est souvent ambigüe. Prenons l'exemple de la conjonction « ou » ; au restaurant « fromage ou dessert » signifie l'un ou l'autre mais pas les deux. Par contre si dans un jeu de carte on cherche « les as ou les cœurs » alors il ne faut pas exclure l'as de cœur. Autre exemple : que répondre à la question « As-tu 10 DH en poche ?» si l'on dispose de 15 DH ? • Il y a des notions difficiles à expliquer. C'est le but de ce chapitre de rendre cette ligne plus claire ! C'est la logique.
Enfin les mathématiques tentent de distinguer le vrai du faux. Par exemple « Est-ce qu'une augmentation de 20%, puis de 30% est plus intéressante qu'une augmentation de 50% ?». Vous pouvez penser « oui » ou « non », mais pour en être sûr il faut suivre une démarche logique qui mène à la conclusion. Cette démarche doit être convaincante pour vous mais aussi pour les autres. On parle de raisonnement.
Les mathématiques sont un langage pour s'exprimer rigoureusement, adapté aux phénomènes complexes, qui rend les calculs exacts et véritables. Le raisonnement est le moyen de valider ou d'infirmer une hypothèse et de l'expliquer.

1. PROPOSITION :

Une proposition est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

Exemples :

– « Je suis plus grand que toi. »

– « $2+2=4$ »

– « $2\times 3=7$ »

– «Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $x^2\geq 0$ »

2. OPERATIONS LOGIQUES :

Si P est une proposition et Q est une autre proposition, nous allons définir de nouvelles propositions construites à partir de P et de Q.

2-1) L'opérateur logique «et »

La proposition « P et Q » est vraie si P est vraie et Q est vraie. La proposition « P et Q » est fausse sinon. On résume ceci en une table de vérité

$P\setminus Q$	V	F
V	V	F
F	F	F

FIGURE 1 – Table de vérité de « *P et Q* »

Exemple1 : soient les propositions $P"\left(\sqrt{3}\geq 1\right)$ et $Q"\left(\left|-\sqrt{3}\right|=-\sqrt{3}\right)$ La proposition P est vraie si Q est fausse Donc La proposition $"PetQ"$ est fausse

Exemple2 :si P est la proposition « Cette carte est un as » et Q La proposition « Cette carte est cœur » alors La proposition « P et Q » est vraie si la carte est l'as de cœur et est fausse pour toute autre carte.

2-2) L'opérateur logique « ou »

La proposition « P ou Q » est vraie si l'une (au moins) des deux proposition s P ou Q est vraie. La proposition « P ou Q » est fausse si les deux proposition s P et Q sont fausses. On reprend ceci dans la table de vérité :

$P \setminus Q$	V	F
V	V	V
F	V	F

FIGURE 2 – Table de vérité de « P *ou* Q »

Exemple : soient les propositions $P"\left(\sqrt{3} \geq 1\right)$ et $Q"\left(\left|-\sqrt{3}\right| = -\sqrt{3}\right)$

La proposition P est vraie si Q est fausse

Donc La proposition $"PouQ"$ est vraie

2-3) La négation « non »

La proposition « non P » est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

On note $\overline{P}$ la négation de La proposition P

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

FIGURE 1.3 – Table de vérité de « non P »

2-3) L'implication ⇒

La proposition « (non P) ou Q » est notée « P ⇒ Q ». Sa table de vérité est donc la suivante :

p	q	$(p \Rightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

FIGURE 1.4 – Table de vérité de « P ⇒ Q »

La proposition « P ⇒ Q » se lit en français « P implique Q ». Elle se lit souvent aussi «si P est vraie alors Q est vraie » ou «si P alors Q ».

Par exemple :

1) $"0 \leq 1" \Rightarrow "\sqrt{2} = 1"$ est fausse

2) $"1+2=4" \Rightarrow "\sqrt{2} = -1"$ est vraie Eh oui, si P est fausse alors La proposition « P ⇒ Q » est toujours vraie.

3) $0 \leq x \leq 100 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 10$ est vraie (prendre la racine carrée).

3) $x \in \left]-\infty ; -4\right] \Rightarrow x^2 + 3x - 4 \succ 0$ est vraie (étudier le binôme).

4) $"\sin x = 0 \Rightarrow x = 0"$ est fausse (regarder pour x =2π par exemple).

Remarque :

Les propositions suivantes ont la même signification :

- si $ABCD$ est un carrée alors $ABCD$ est un parallélogramme.
- $ABCD$ est un carrée implique $ABCD$ est un parallélogramme.
- Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme il suffit qu'il soit un carrée.

 Pour que $ABCD$ soit un carrée il faut qu'il soit un parallélogramme
En générale : si on a : $\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$ on peut dire que :
Q est une condition nécessaire pour que $ABCD$ un parallélogramme est nécessaire pour que $ABCD$ soit un carrée
P est une condition suffisante pour que $ABCD$ un carrée est suffisante pour que $ABCD$ soit un parallélogramme

2-4) L'équivalence $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ L'équivalence est définit par : « P $\Leftrightarrow$ Q » est La proposition «(P ⇒ Q) et (Q ⇒ P)». On dira « P est équivalent à Q » ou « P équivaut à Q » ou « P si et seulement si Q ». Cette proposition est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses. La table de vérité est :

p	q	$(p \Leftrightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

FIGURE 1.5 – Table de vérité de « P $\Leftrightarrow$ Q »

Exemples :

1) $"0 \leq -1" \Leftrightarrow "\sqrt{2} = 1"$ est vraie
2) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $x' \in \mathbb{R}$ l'équivalence $x \times x' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x' = 0$ est vraie.
3)Voici une équivalence toujours fausse
(quelle que soit La proposition P) : « P $\Leftrightarrow$ non(P)».

2-5) Loi logique ou une tautologie.

Activité : En utilisant les tableaux de vérité ; déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes :
1- $([(P \Rightarrow Q)\ et\ (Q \Rightarrow P)] \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q))$
2-$P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R \Rightarrow (P \Rightarrow R$

Définition : On appelle une loi logique toute proposition constitué par des propositions liées entre elles par des connexions logiques est qui est toujours vraie quel que soit la valeur de vérité des propositions qui la constituent.
Une loi logique s'appelle aussi une tautologie.

Proposition 1 : Soient P, Q, R trois proposition s. Nous avons les équivalences (vraies) suivantes :
1) P $\Leftrightarrow$non(non(P))
2. (P et Q) $\Leftrightarrow$ (Q et P)

3. (P ou Q) $\Leftrightarrow$ (Q ou P)

4. non(P et Q) $\Leftrightarrow$ (non P) ou (non Q)

5. non(P ou Q) $\Leftrightarrow$ (non P) et (non Q)

6.P et (Q ou R) $\Leftrightarrow$ (P et Q) ou (P et R)

7.P ou (Q et R) $\Leftrightarrow$ (P ou Q) et (P ou R)

8. « P ⇒ Q » $\Leftrightarrow$ «non(Q) ⇒ non(P)»

<u>Démonstration :</u> Voici la démarche de démonstrations : Il suffit de dresser les tables de vérités de et comme elles sont égales les deux propositions sont équivalentes

3. Quantificateurs et fonction propositionnelle

Si une proposition P dépend d'un paramètre x on l'appelle <u>fonction propositionnelle</u>

Définition : Une fonction propositionnelle sur un ensemble E est une expression contenant une ou plusieurs variables Libres dans E et qui est susceptible de devenir une proposition vraie ou fausse si l'on attribue à ces variables certaines valeurs particulières de l'ensemble E

Par exemple « $x^2 \geq 0$ », La fonction propositionnelle P(x) est vraie ou fausse selon la valeur de x.

La proposition « $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ » est une proposition vraie

Lorsque les propositions P(x) sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E

3.1 Le Quantificateurs ∀: «pour tout» :

On lit « Pour tout x appartenant à E, P(x) »

Sous-entendu « Pour tout x appartenant à E, P(x) est vraie ».

Exemples :

«$\forall x \in [1;+\infty[: x^2 \geq 1$)» est une proposition vraie.

«$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1$)»est une proposition fausse.

«$\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)$)»est divisible par 2» est vraie.

3.2 Le Quantificateurs ∃: «il existe»

La proposition $\exists x \in E / P(x)$ est une proposition vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x de E pour lequel P(x) est vraie. On lit «il existe x appartenant à E tel que P(x) (soit vraie)».

Exemples :

1) «$\exists x \in \mathbb{R} : x(x-1) \geq 0$)» est vraie (par exemple x = 1 (1 vérifie bien la propriété).

2)«$\exists n \in \mathbb{N} : n^2 - n \geq n$)»est vraie (il y a plein de choix, par exemple n=3 convient, mais aussi n=10 ou même n=100, un seul suffit pour dire que La proposition est vraie)

3) «$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$)» est fausse (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif)

3.3 La négation des Quantificateurs :

La négation de «$\forall x \in E : P(x)$)»est «$\exists x \in E : \overline{P(x)}$».

La négation de «$\exists x \in E : P(x)$)»est «$\forall x \in E : \overline{P(x)}$».

Exemples :

1)La négation de «$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1$)»est La proposition $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \prec 1$

En effet la négation de $x^2 \geq 1$ est non($x^2 \geq 1$) mais s'écrit plus simplement $x^2 \prec 1$.

2)La négation de «$\forall x \in \mathbb{R} : x+1 \in \mathbb{Z}$)»est «$\exists x \in \mathbb{R} : x+1 \notin \mathbb{Z}$)»

3)La négation de «$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$)»est «$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -1$)»

4) La négation de P :«$\forall x \in \mathbb{R}; \exists y \succ 0 : x + y \geq 10$» sa négation est :

$\overline{P}$:«$\exists x \in \mathbb{R}; \forall y \succ 0 : x + y \prec 10$»

Remarques

L'ordre des Quantificateurs est très important. Par exemple les deux phrases logiques : «$\forall x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R} : x + y \geq 0$» et $\exists x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R} : x + y \geq 0$ sont différentes. La première est vraie, la seconde est fausse. En effet une phrase logique se lit de gauche à droite, ainsi la première phrase affirme « Pour tout réel x, il existe un réel y
(qui peut donc dépendre de x) tel que x + y > 0.» (Par exemple on peut prendre y =|x|+1). C'est donc une phrase vraie. Par contre la deuxième se lit :
« Il existe un réel y, tel que pour tout réel x, x + y > 0.»
Cette phrase est fausse, cela ne peut pas être le même y qui Convient pour tous les x !
On retrouve la même différence dans les phrases en français suivantes. Voici une phrase vraie « Pour toute personne, il existe un numéro de téléphone », bien sûr le numéro dépend de la

personne. Par contre cette phrase est fausse : « Il existe un numéro, pour toutes les personnes ». Ce serait le même numéro pour tout le monde !

Remarques :

1)Quand on écrit « $\exists x\in\mathbb{R}: f(x)=0$ »cela signifie juste qu'il existe au moins un réel pour lequel f s'annule. Rien ne dit que ce x est unique. Afin de préciser que f s'annule en une unique valeur, on rajoute un point d'exclamation : $\exists! x\in\mathbb{R}: f(x)=0$

2)Pour la négation d'une phrase logique, il n'est pas nécessaire de savoir si la phrase est fausse ou vraie. Le procédé est algorithmique : on change le « pour tout » en «il existe » et inversement,

Exercice1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes

1) $P:"\forall x\in\mathbb{R} / x^2>0"$
2) $P:$ $"\exists x\in\mathbb{R} / x^2-2=0"$
3) $P: x\in[1;2[$
4) $P:"$ $\forall n\in\mathbb{N}/\frac{n}{2}\in\mathbb{N}"$
5) $P:(\forall x\in\mathbb{R});-1\leq\cos x\leq 1$
6) $P:(\forall n\in\mathbb{N});(\exists m\in\mathbb{N}): n\prec m$
7) $P:(\exists n\in\mathbb{N})$ $2n+1$ est pair
8) $P:(\forall n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\in\mathbb{N}$
9) $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}): y-x>0$
10) $P:(\exists! x\in\mathbb{R});2x+4=0$
11) $P:(\exists! x\in\mathbb{R});x^2=2$
12) $P:(\exists x\in\mathbb{Z});\frac{x}{4}\in\mathbb{Z}$
13) $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}): y^2=x$

Solution :

1) $\overline{P}:"\exists x\in\mathbb{R} / x^2\leq 0"$ et on a $P:$est fausse
2) $\overline{P}$ $"\forall x\in\mathbb{R} / x^2-2\neq 0"$ et on a $P:$est vraie
3) $\overline{P}$: $x\notin[1;2[$
4) $\overline{P}$ $\exists n\in\mathbb{N}/\frac{n}{2}\notin\mathbb{N}"$ et on a $P:$est fausse
5) $\overline{P}$ $(\exists x\in\mathbb{R});\cos x\succ 1$ ou $\cos x\prec -1$ et on a $P:$est vraie
6) $\overline{P}$ $(\exists n\in\mathbb{N});(\forall m\in\mathbb{N}): n\geq m$ et on a $P:$est vraie
7) $\overline{P}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ $2n+1$ est impair $P:$est fausse
8) $\overline{P}$ $(\exists n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\notin\mathbb{N}$ et on a $P:$est vraie
$\overline{P}$ 9) $(\exists x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R}): y-x\leq 0$ et on a $P:$est fausse
10) $P:(\exists! x\in\mathbb{R});2x+4=0$ on a $P:$est vraie
11) $P:$ $(\exists! x\in\mathbb{R});x^2=2$ on a $P:$est fausse
12) $\overline{P}$ $(\forall x\in\mathbb{Z});\frac{x}{4}\notin\mathbb{Z}$ et on a $P:$est vraie
13) $\overline{P}$ $(\exists x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R}): y^2=x$ et on a $P:$est fausse

Exercice 2 Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. Le carré de tout réel est positif.
2. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.

3. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
4. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
5. Il existe un entier multiple de tous les autres.
6; Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Solution :

1. "$\forall x \in \mathbb{R} / x^2 \geq 0$"
2. "$\exists x \in \mathbb{R}, x \succ x^2$ "
3. $(\forall n \in \mathbb{N});(\exists m \in \mathbb{N}) : n \prec m$
4. $(\exists x \in \mathbb{R}) : (\forall n \in \mathbb{Z});(\forall m \in \mathbb{N}^*) : x \neq \frac{n}{m}$
5. $(\exists n \in \mathbb{N});(\forall m \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}) : n = m \times k$
6. $(\forall x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R}) / x \prec y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q} / x \prec z \prec y$

4. RAISONNEMENTS

Voici des méthodes classiques de raisonnements.

4.1. <u>Raisonnement direct</u> : On veut montrer que La proposition « P ⇒ Q » est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie

Exemple1 : $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

Montrer que : $\begin{cases} 0 \leq x \prec 2 \\ 0 \leq y \prec 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \succ 1$

Solution : $\begin{cases} 0 \leq x \prec 2 \\ 0 \leq y \prec 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} \succ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} \succ \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \succ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \succ 1$

Exemple2 : $x \in \mathbb{R}^+$ Montrer que : $\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$

Solution : $\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow \left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right) = 1$

$\Rightarrow 1 + \left(\sqrt{x}\right)^2 = 1 \Rightarrow 1 + x = 1 \Rightarrow x = 0$

Exemple3 : 1) Montrer que : $\left(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2\right) : a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ et $b = 0$

2) $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ Montrer que: $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$

Solution : 1) $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a^2 = -b^2 \Rightarrow a^2 \in \mathbb{R}^-$

Or on sait que $a^2 \in \mathbb{R}^+$ donc $a^2 \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-$ donc $a^2 = 0$ donc $a = 0$

Et puisque $a^2 + b^2 = 0$ alors $b = 0$

2) $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 + y - 2\sqrt{y} + 1 = 0$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{y} - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 = 0$ et $\sqrt{y} - 1 = 0$ d'apres1)

$\Rightarrow \sqrt{x} = 1$ et $\sqrt{y} = 1 \Rightarrow x = 1$ et $y = 1$

Donc : $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$

Exemple4 : Montrer que : $\left(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2\right) : a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |a + b| \leq \sqrt{2}$

Solution : 1)supposons que : $a^2+b^2=1$

Or on sait que $\forall(a;b)\in\mathbb{R}$:$(a-b)^2\geq 0$

Donc : $a^2-2ab+b^2\geq 0$ et puisque : $a^2+b^2=1$ alors :

$1-2ab\geq 0$ Donc $2ab\leq 1$ et $a^2+b^2=1$

Par suite : $a^2+b^2+2ab\leq 2$ donc $(a+b)^2\leq 2$

donc $\sqrt{(a+b)^2}\leq\sqrt{2}$ donc $|a+b|\leq\sqrt{2}$

Or on sait que $a^2\in\mathbb{R}^+$ donc $a^2\in\mathbb{R}^+\cap\mathbb{R}^-$ donc $a^2=0$ donc $a=0$

Et puisque $a^2+b^2=0$ alors $b=0$

2) $x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x-2\sqrt{x}+1+y-2\sqrt{y}+1=0$

$\Rightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{y}-1\right)^2=0\Rightarrow\sqrt{x}-1=0$ et $\sqrt{y}-1=0$ d'apres1)

$\Rightarrow\sqrt{x}=1$ et $\sqrt{y}=1\Rightarrow x=1$ et $y=1$

Donc : $x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x=y=1$

Exemple5 : Montrer que si $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{Q}$ alors $a+b\in\mathbb{Q}$

Solution : Prenons $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{Q}$. Rappelons que les rationnels $\mathbb{Q}$ sont l'ensemble des réels s'écrivant $\frac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$.

Alors $a=\frac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$; De même $b=\frac{p'}{q'}$ avec $p'\in\mathbb{Z}$ et $q'\in\mathbb{N}^*$ donc

$a+b=\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}=\frac{p\times q'+q\times p'}{q\times q'}$. Or le numérateur $p\times q'+q\times p'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$; le dénominateur $q\times q'$ est lui un élément de $\mathbb{N}^*$. Donc $a+b$ s'écrit bien de la forme $a+b=\frac{p''}{q''}$ avec $p''\in\mathbb{Z}$ et $q''\in\mathbb{N}^*$ Ainsi $a+b\in\mathbb{Q}$

Exemple6 : on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par :

$f(x)=\frac{x+2}{2x+1}$ Montrer que : $|x-1|\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}|x-1|\leq|f(x)-f(1)|\leq\frac{1}{2}|x-1|$

Solution : $|x-1|\prec\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{1}{2}\prec x-1\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\prec x\prec\frac{3}{2}$

On a : $f(x)-f(1)=\frac{x+2}{2x+1}-1=\frac{x+2-2x-1}{2x+1}=\frac{1-x}{2x+1}$

Donc : $|f(x)-f(1)|=\left|\frac{1-x}{2x+1}\right|=|1-x|\times\frac{1}{|2x+1|}$

Et on a : $|x-1|\prec\Rightarrow\frac{1}{2}\prec x\prec\frac{3}{2}\Rightarrow 2\prec 2x+1\prec 4$

$\Rightarrow\frac{1}{4}\prec\frac{1}{|2x+1|}\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}|x-1|\leq|f(x)-f(1)|\leq\frac{1}{2}|x-1|$

Donc : $|x-1|\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}|x-1|\leq|f(x)-f(1)|\leq\frac{1}{2}|x-1|$

Exemple7 : Montrer que : $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$

Solution :
On a : $n \in \mathbb{N}$ donc $n+1 \prec n+2$
donc $0 \prec \frac{n+1}{n+2} \prec 1$ donc $\frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$

Exemple8 : Montrer que pour tout $\forall x \in [-2;2] : 2\sqrt{2} \succ \sqrt{4-x^2}$.

Solution : l'inéquation est définie ssi voici le tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$D_I = [-2;2]$

Soit $x \in [-2;2]$.

$$2\sqrt{2} - \sqrt{4-x^2} = \frac{\left(2\sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}{2\sqrt{2} + \sqrt{4-x^2}} = \frac{8-4+x^2}{2\sqrt{2} + \sqrt{4-x^2}}$$

$$2\sqrt{2} - \sqrt{4-x^2} = \frac{4+x^2}{2\sqrt{2} + \sqrt{4-x^2}} \succ 0$$

donc $\forall x \in [-2;2] : 2\sqrt{2} \succ \sqrt{4-x^2}$

4.2. <u>Raisonnement par</u> <u>disjonction des cas :</u>

Si l'on souhaite verrier une proposition P(x) pour tous les x dans un ensemble E, on montre La proposition pour les x dans une partie A de E, puis pour les x n'appartenant pas à A. C'est la méthode de disjonction des cas ou méthode cas par cas.

Donc : Si on montre que les deux proposition $\overline{P} \Rightarrow Q$ et $P \Rightarrow Q$ sont vraies (et puisque la dernière proposition est une loi logique) on peut conclure que Q est vraie.

Exemple1 : Montrer que pour tout $\forall x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq x^2 - x + 1$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.

Premier cas : x >1 Alors|x−1|= x−1.

Calculons alors $(x^2-x+1)-(x-1) = x^2-x+1-x+1$

$(x^2-x+1)-(x-1) = x^2-2x+1+1 = (x-1)^2+1 \geq 0$ Ainsi $x^2-x+1 \geq |x-1|$

Deuxième cas : x < 1. Alors|x−1|=−(x−1).

Nous obtenons $(x^2-x+1)+(x-1) = x^2-x+1+x-1 = x^2 \geq 0$.

Et donc $x^2-x+1 \geq |x-1|$

Conclusion : Dans tous les cas $x^2-x+1 \geq |x-1|$.

Exemple2 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (E): $1-\frac{x}{4} \succ \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Solution : soit S l'ensemble des solution de (E)

et $x \in]-1;+\infty[$ **on a :** $x \in S \Leftrightarrow \frac{4-x}{4} \succ \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

1 cas : si $x \in [4;+\infty[$ alors $4-x \leq 0$ donc $S = \varnothing$

2 cas : si $x \in]-1;4[$ alors $4-x \geq 0$ donc

$$\frac{4-x}{4} \succ \frac{1}{\sqrt{1+x}} \Leftrightarrow \left(\frac{4-x}{4}\right)^2 \succ \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^2 \Leftrightarrow x\left(x^2-7x+8\right) \succ 0$$

$\Leftrightarrow x \in \left]0;\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right]$ donc $S_2 = \left]0;\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right]$

Donc $S = S_1 \cup S_2 = \left]0;\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right]$

Exemple3 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1) : $|x-1|+2x-3 \geq 0$

Solution : soit S l'ensemble des solution de (1)

soit $x \in \mathbb{R}$**:** on va déterminer le signe de : $x-1$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

si $x \in [1;+\infty[$ alors $|x-1| = x-1$

donc l'inéquation (1) devient : $x-1+2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow 3x-4 \geq 0$

$3x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$ donc : $S_1 = \left[\frac{4}{3};+\infty\right[\cap [1;+\infty[= \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

si $x \in]-\infty;1]$ alors $|x-1| = -(x-1) = -x+1$

donc l'inéquation (1) devient : $-x+1+2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

donc $S_2 = [2;+\infty[\cap]-\infty;1] = \varnothing$

finalement : $S = S_1 \cup S_2 = \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Exemple4 : Montrer que pour tout $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1}+x \succ 0$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.

Premier cas : $x \geq 0$ Alors $x^2 \geq 0$ donc $x^2+1 \geq 1 \succ 0$

donc $\sqrt{x^2+1} \succ 0$ et on a $x \geq 0$ donc $\sqrt{x^2+1}+x \succ 0$

Deuxième cas : $x \leq 0$. on a $x^2+1 \succ x^2$

donc $\sqrt{x^2+1} \succ \sqrt{x^2}$ donc $\sqrt{x^2+1} \succ |x|$ or $x \leq 0$

alors on a : $\sqrt{x^2+1} \succ -x$ donc $\sqrt{x^2+1}+x \succ 0$

finalement : $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1}+x \succ 0$

Exemple5 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1) : $x^2-|x-2|+5=0$

Solution : soit S l'ensemble des solution de (1)

soit $x \in \mathbb{R}$**:** étudions le signe de : $x-2$

Premier cas : si $x \in [2;+\infty[$ alors $|x-2| = x-2$

donc l'équation (1) devient : $x^2-(x-2)+5=0 \Leftrightarrow x^2-x+7=0$

$\Delta = 1-28 = -27 \prec 0$ donc : $S_1 = \varnothing$

Deuxième cas : si $x \in]-\infty;2[$ alors $|x-2| = -(x-2) = -x+2$

donc l'équation (1) devient : $x^2 + (x-2) + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 3 = 0$

$\Delta = 1 - 12 = -11 \prec 0$ donc $S_2 = \varnothing$

finalement : $S = S_1 \cup S_2 = \varnothing$

Exemple 6 :Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution : soit $n \in \mathbb{N}$ on a 3 cas possibles seulement pour n

$n = 3k$ ou $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$

1cas : $n = 3k$

$n(n+1)(n+2) = 3k(3k+1)(3k+2) = 3k'$ Avec $k' = k(3k+1)(3k+2)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

2cas : $n = 3k+1$

$n(n+1)(n+2) = (3k+1)(3k+2)(3k+3) = 3(3k+1)(3k+2)(k+1) = 3k'$

Avec $k' = (3k+1)(3k+2)(k+1)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

3cas : $n = 3k+2$

$n(n+1)(n+2) = (3k+2)(3k+3)(3k+4) = 3(3k+2)(k+1)(3k+4) = 3k'$

Avec $k' = (3k+2)(k+1)(3k+4)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

4.3. Raisonnement par contraposition :

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante :
La proposition « P ⇒ Q » est équivalente à « non(Q) ⇒ non(P) ».
Donc si l'on souhaite montrer La proposition « P ⇒ Q »
On montre en fait que non(Q) ⇒ non(P) est vraie.

Exemple 1 : $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Montrer que : $x \neq 2$ et $y \neq 2 \Rightarrow 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$

Solution : soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $2x + 2y - xy - 2 = 2 \Rightarrow x = 2$ ou $y = 2$

On a : $2x + 2y - xy - 2 = 2 \Rightarrow 2x + 2y - xy - 4 = 0$

$\Rightarrow x(2-y) - 2(2-y) = 0 \Rightarrow (2-y)(x-2) = 0$

$\Rightarrow 2 - y = 0$ ou $x - 2 = 0$ $\Rightarrow y = 2$ ou $x = 2$

Donc : $x \neq 2$ et $y \neq 2 \Rightarrow 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$

Exemple 2 : $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq -5$

Montrer que : $x \neq -8 \Rightarrow \dfrac{x+2}{x+5} \neq 2$

Solution : soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : : $\frac{x+2}{x+5}=2 \Rightarrow \ x=-8$

On a : $\frac{x+2}{x+5}=2 \Rightarrow x+2=2(x+5)$

$\Rightarrow x+2=2x+10 \Rightarrow x=-8$

Donc : $x \neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2$

Exemple 3 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Solution : Nous supposons que n n'est pas pair

Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair

Comme n n'est pas pair il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n=2k+1$.

Alors $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2k'+1$ avec $k'=2k^2+2k \in \mathbb{N}$.

Et donc n^2 est impair.

Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

Exemple4 : $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

Montrer que : $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

Solution : Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1) \Rightarrow x=y$??

On a : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1) \Rightarrow xy-x+y-1=xy+x-y-1$

$\Rightarrow -2x=-2y \Rightarrow x=y$

Donc : $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

Exemple 5 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$

Montrer que $n \times p$ est pair ou n^2-p^2 est un multiple de 8 .

Solution :

- Si n ou p sont pairs alors $n \times p$ est pair
- Si n ou p sont impairs alors

$n=2k+1$ et $p=2k'+1$ avec $k \in \mathbb{N}; k' \in \mathbb{N}$

Donc $n^2-p^2=(2k+1)^2-(2k'+1)^2$

$n^2-p^2==4\left(k(k+1)-k'(k'+1)\right)$ et on a : $m(m+1)$ est pair

$n^2-p^2=4(2\alpha-2\beta)=8(\alpha-\beta)=8k''$ donc n^2-p^2 est un multiple de 8 .

4.4. Raisonnement par l'absurde :

Le raisonnement par l'absurde repose sur le principe suivant : pour montrer « P ⇒ Q » on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc « P ⇒ Q » est vraie.

Exemple1 : Soient $a \succ 0$ et $b \succ 0$ Montrer que si $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors a = b.

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$.

Comme $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a)=b(1+b)$ donc $a+a^2=b+b^2$ d'où $a^2-b^2=b-a$. Cela conduit à $(a-b)(a+b)=-(a-b)$ Comme $a \neq b$ alors $a-b \neq 0$ et donc en divisant par a−b on obtient :

a+ b =−1. La somme des deux nombres positifs a et b ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction. Conclusion : si $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors a = b.

Exemple2 : Soit f la fonction numérique définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+2x$

Montrer qu'il n'existe pas de nombre positif M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\le M$

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre positif M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\le M$

$$f(x)\le M \Rightarrow x^2+2x\le M \Rightarrow x^2+2x+1\le M+1$$

$$\Rightarrow (x+1)^2\le M+1 \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2}\le\sqrt{M+1} \Rightarrow |x+1|\le\sqrt{M+1}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{M+1}\le x+1\le\sqrt{M+1} \Rightarrow -\sqrt{M+1}-1\le x\le\sqrt{M+1}-1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Nous obtenons une contradiction car il suffit de prendre : $x=\sqrt{M+1}$

Donc notre supposition est fausse donc : il n'existe pas de nombre positif M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\le M$

Exemple3 : Montrer que : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$

Donc il existe $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}^*$; tel que $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ avec $a\wedge b=1$

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b}\Rightarrow a=b\sqrt{2}\Rightarrow a^2=\left(b\sqrt{2}\right)^2$$

$\Rightarrow a^2=2b^2\Rightarrow a^2$ est pair $\Rightarrow a$ est pair

Et on a : $\sqrt{2}=\frac{a}{b}\Rightarrow a^2=2b^2\Rightarrow 4k^2=2b^2\Rightarrow 2k^2=b^2$

$\Rightarrow b^2$ est pair $\Rightarrow b$ est pair

Donc on a : $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ avec a est pair et b est pair

Cad : $a\wedge b\neq 1$ Nous obtenons une contradiction

Donc notre supposition est fausse donc $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Exemple4 (Contraposée ou absurde)

Soient $a;b\in\mathbb{Q}$

1)Montrer que : $a+b\sqrt{2}=0\Rightarrow a=b=0$

2)en déduire que : $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}\Rightarrow a=a'$ et $b=b'$

Solution :1) Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $b\neq 0$

$$a+b\sqrt{2}=0\Rightarrow b\sqrt{2}=-a\Rightarrow -\frac{a}{b}=\sqrt{2}$$

Or $a;b\in\mathbb{Q}$ donc $-\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ mais on sait que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ Nous obtenons donc une contradiction

Donc $b=0$ et puisque : $a+b\sqrt{2}=0$ alors $a=0$

2) supposons que : $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}$ donc $a-a'+b\sqrt{2}-b'\sqrt{2}=0$

donc $a-a'+\sqrt{2}(b-b')=0$ et d'après **1) on aura :** $a-a'=0$ et $b-b'=0$

donc $a=a'$ et $b=b'$

Exemple5 (absurde)

On considère l'ensemble : $A=\{1;2;3;4;...;n\}$ avec n un nombre entier impair

Et soient x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ;… ; x_n des éléments de l'ensemble A distincts deux a deux

Montrer que : $\exists i \in A/\ \ x_i - i$ est pair

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que :

$\forall i \in A/\ \ x_i - i$ est impair

On a donc : $S=(x_1-1)+(x_2-2)+(x_3-3)+...+(x_n-n)$ un nombre entier impair

Car c'est la somme d'un nombre impair de nombres impairs

Or : $S=(x_1+x_2+x_3+...+x_n)-(1+2+3+...+n)=0$ est 0 est pair

Nous obtenons donc une contradiction donc :

$\exists i \in A/\ \ x_i - i$ est pair

4.5. Raisonnement par Contre-exemple :

Si l'on veut montrer qu'une proposition du type $\forall x \in E : P(x)$ est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que P(x) est vraie. Par contre pour montrer que cette proposition est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que P(x) soit fausse. Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à La proposition $\forall x \in E : P(x)$

Exemple1 : Montrer que La proposition $P:(\forall x \in [0;1]): x^2 \geq x$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:(\exists\, x \in [0;1]): x^2 \prec x$

On posant : $x=\frac{1}{2}$ on aura : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \prec \frac{1}{2}$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exemple2 : Montrer que La proposition $P:(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}): x^2+y^2 \geq x+y$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}): x^2+y^2 \prec x+y$

On posant : $x=1$ et $y=\frac{1}{2}$ on aura : $1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \prec 1+\frac{1}{2}$ c a d $\frac{5}{4} \prec \frac{6}{4}$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exemple3 : Montrer que La proposition $P:(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2): \sqrt{a^2+b^2}=a+b$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:(\exists (a;b) \in \mathbb{R}^2): \sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$

On posant : $a=4$ et $b=3$ on aura : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ et $a+b=4+3=7$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exemple4 : Montrer que La proposition suivante est fausse :

« Tout entier positif est somme de trois carrés »

(Les carrés sont les 0^2, 1^2, 2^2, 3^2,... Par exemple $6=1^2+1^2+2^2$.)

Démonstration. Un contre exemples : les carrés inférieurs à7 sont 0,1,4 mais avec trois de ces nombres on ne peut faire 7.

Exemple5 : Montrer que La proposition $P:(\forall x \in \mathbb{R}^*): x+\frac{1}{x} \geq 2$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:(\exists x \in \mathbb{R}^*): x+\frac{1}{x} \prec 2$

On posant : $x=-1$ on aura : $-1+\frac{1}{-1}=-2 \prec 2$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exemple6 : on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=2x^2-x+3$ Montrer que : f n'est ni pair ni impair

Solution : f est n'est pas pair ssi $(\exists x\in\mathbb{R}): f(-x)\neq f(x)$

f est n'est pas impair ssi $(\exists x\in\mathbb{R}): f(-x)\neq -f(x)$

On a en effet : $f(1)=4$ et $f(-1)=6$ donc

$f(-1)\neq -f(1)$ et $f(-1)\neq f(1)$

Donc f n'est ni pair ni impair

Exempl7 : Montrer que La proposition $P:\forall(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4;\begin{cases}a\neq b\\ c\neq d\end{cases}\Rightarrow a+c\neq b+d$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:\exists(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4;\begin{cases}a\neq b\\ c\neq d\end{cases}$ et $a+c=b+d$

On a : $2\neq 3$ et $1\neq 0$ et $2+1=3+0$

donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exemple8 : Montrer que La proposition $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}): x^2-xy+y^2=0$ est fausse

Solution : sa négation est : $\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}): x^2-xy+y^2\neq 0$

On posant : $x=1$ on aura : $1-y+y^2$ c a d y^2-y+1

$\Delta=(-1)^2-4=-3\prec 0$ donc : $y^2-y+1\succ 0$ donc : $y^2-y+1\neq 0$

donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

4.6. <u>Raisonnement par équivalence :</u>

Le raisonnement par équivalence repose sur le principe suivant : pour montrer que P est vraie on montre que « P $\Leftrightarrow$ Q » est vraie et Q est vraie donc on déduit que P est vraie.

Exemple1 : $\forall x>0\quad x+\frac{1}{x}\geq 2$

Solution : $x+\frac{1}{x}\geq 2\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x}\geq 2\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}\geq 2$

$\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}-2\geq 0\Leftrightarrow\frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0$

$\Leftrightarrow\frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$

et puisque on a : $\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$ donc $\forall x>0\quad x+\frac{1}{x}\geq 2$

Exemple2 : soit $x\in\mathbb{R}$ Montrer que : $|x-1|\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{5}\leq\frac{1}{x+1}\leq\frac{2}{3}$

Solution : $|x-1|\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq x-1\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}+2\leq x-1+2\leq\frac{1}{2}+2$

$\Leftrightarrow\frac{3}{2}\leq x+1\leq\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{5}\leq\frac{1}{x+1}\leq\frac{2}{3}$

Exemple3 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $\sqrt{x^2+1}=2x$

soit S l'ensemble des solution de l'équation (E)

Solution :

Methode1 : $x\in S\Rightarrow\sqrt{x^2+1}=2x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}^2=(2x)^2$

$\Rightarrow x^2+1=4x^2\Rightarrow 3x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3} ou x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Remarque : on ne peut pas affirmer que :

$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ sont les solutions de l'équation

Et inversement on a : $\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{1}{3}+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\neq-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Donc : $-\frac{\sqrt{3}}{3}\notin S$ et on a : $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{1}{3}+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Methode2 : $x\in S\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=2x$ et $x\geq0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}^2=(2x)^2$

$\Leftrightarrow x^2+1=4x^2$ et $x\geq0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}$ et $x\geq0$

$\Leftrightarrow$ ($x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$) et $x\geq0$

Donc : $S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

Exemple4 : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $|x-y|\leq2\sqrt{x^2+y^2+xy}$

Solution : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

$|x-y|\leq2\sqrt{x^2+y^2+xy}\Leftrightarrow|x-y|^2\leq\left(2\sqrt{x^2+y^2+xy}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\leq4x^2+4y^2+4xy\Leftrightarrow3x^2+3y^2+6xy\geq0$

$\Leftrightarrow3\left(x^2+2xy+y^2\right)\geq0\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2\geq0\Leftrightarrow(x+y)^2\geq0$

On sait que $(x+y)^2\geq0$ (vraie)

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\forall y\in\mathbb{R}$: $|x-y|\leq2\sqrt{x^2+y^2+xy}$

Exemple5 : 1) Montrer que :$\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right):a+b=0\Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ Montrer que: $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2\Leftrightarrow x=y=0$

<u>Démonstration</u> : 1)a) $\Rightarrow$:$\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right):a+b=0\Rightarrow a=0$ et $b=0$

Supposons que ; $a+b=0$ et ($a\neq0$ ou $b\neq0$) et $(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2$

Donc $a+b\succ0$ contradiction par suite $a=0$ et $b=0$

b) $\Leftarrow$ inversement si $a=0$ et $b=0$ alors on aura $a+b=0$

donc : $\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right):a+b=0\Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}-2=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)+\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)=0$ or $\sqrt{x^2+1}-1\geq0$ et $\sqrt{y^2+1}-1\geq0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-1=0$ et $\sqrt{y^2+1}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=1$ et $\sqrt{y^2+1}=1$

$\Leftrightarrow x^2+1=1$ et $y^2+1=1 \Leftrightarrow x^2=0$ et $y^2=0 \Leftrightarrow x=0$ et $y=0$

Donc : $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \Leftrightarrow x=y=0$

4.7. <u>Raisonnement par récurrence :</u>

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une proposition P(n), dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :

1étapes : l'initialisation on prouve P (0) est vraie

2étapes : d'hérédité : on suppose n > 0 donné avec P(n) vraie

3étapes : on démontre alors que La proposition P(n+1) au rang suivant est vraie

Enfin dans la conclusion : P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour expliquer ce principe assez intuitivement, prenons l'exemple suivant :
La file de dominos : Si l'on pousse le premier domino de la file (Initialisation).
Et si les dominos sont posés l'un après l'autre d'une manière `a ce que la chute d'un domino entraine la chute De son suivant (hérédité).
Alors : Tous les dominos de la file tombent. (La conclusion)

Exemple 1: Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq 1+2n$.

Solution : notons P(n) La proposition suivante : $\forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq 1+2n$. Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $3^0 \geq 1+2\times 0$ donc $1 \geq 1$.

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $3^n \geq 1+2n$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $3^{n+1} \geq 1+2(n+1)$?? c'est-à-dire Montrons que $3^{n+1} \geq 2n+3$??

On a : $3^n \geq 1+2n$ d'après l'hypothèse de récurrence donc $3^n \times 3 \geq 3\times(1+2n)$

donc : $3^{n+1} \geq 6n+3$

Or on remarque que : $6n+3 \geq 2n+3$(on pourra faire la différence $(6n+3)-(2n+3)=4n \geq 0$)

donc : on a $6n+3 \geq 2n+3$ et $3^{n+1} \geq 6n+3$ donc $3^{n+1} \geq 2n+3$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence P(n) est vraie pour tout n > 0, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq 1+2n$.

Exemple 2: (Récurrence) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+3+...+n = \dfrac{n\times(n+1)}{2}$.

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons $1=\dfrac{1\times(1+1)}{2}=\dfrac{2}{2}=1$ donc $1=1$.

Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $1+2+3+...+n=\dfrac{n\times(n+1)}{2}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $1+2+3+...+n+(n+1)=\dfrac{(n+1)\times(n+2)}{2}$??

On a : $1+2+3+...+n+(n+1)=(1+2+3+...+n)+(n+1)$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)\times(n+2)}{2}$

donc $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n\times(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion: Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*;1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

Exemple 3: Montrer par récurrence que :pour tout entier $n\geq 5$: $2^n\geq 6n$

Solution : notons P(n) La proposition : « $2^n\geq 6n$ »

1étapes : Initialisation : Pour $n=5: 2^5=32$ et $6\times 5=30$ donc $2^5\geq 6\times 5$
Donc P(5) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $2^n\geq 6n$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $2^{n+1}\geq 6(n+1)$??

Or, puisque $2^n\geq 6n$ (d'après l'hypothèse de récurrence)
Donc : $2^n\times 2\geq 6n\times 2$ donc $2^{n+1}\geq 12n$ **(1)**
Or on remarque que : $12n\geq 6(n+1)$ **(2)**

En effet : $12n-6(n+1)=6n-6\geq 0$

Car : $n\geq 5$donc $6n\geq 30$ donc $6n-6\geq 24\geq 0$

On conclut par récurrence que : Pour tout $n\geq 5$: $2^n\geq 6n$

Exemple 4: Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};n^3+2n$ est divisible par 3

Solution :montrons $\exists k\in\mathbb{N}/n^3+2n=3k$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $0^3+2\times 0=0$ est un multiple de3
Donc P (0) est vraie.
2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie
c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/n^3+2n=3k$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3+2(n+1)=3k'$??

$(n+1)^3+2(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+2n+2=$

$=(n^3+2n)+3n^2+3n+3=3k+3(n^2+n+1)=3(k+n^2+n+1)$

$=3(k+n^2+n+1)=3k'$ avec $k'=k+n^2+n+1$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N};n^3+2n$ est divisible par 3

Exemple 5: (Récurrence) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}.$$

Solution : notons P(n) La proposition
Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons $1^2=\frac{1\times(1+1)\times(2+1)}{6}=\frac{1\times 2\times 3}{6}=1$

donc $1=1$. Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$??

On a : $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = (1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+(n+1)^2$

et on a : $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$ d'après l'hypothèse de récurrence donc

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right)$$

$$=(n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right)$$

Et on remarque que : $2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$

Donc : $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$

Exemple 6: (Récurrence) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2\times(n+1)^2}{4}.$$

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons $1^3 = \frac{1^2\times(1+1)^2}{4} = 1$

donc $1=1$. Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\times(n+1)^2}{4}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2\times(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$??

On a : $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$

et on a : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\times(n+1)^2}{4}$ d'après l'hypothèse de récurrence donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2\times(n+1)^2}{4}+(n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right)=(n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)$$

$=\left(n+1\right)^2\frac{\left(n+2\right)^2}{4}=\left(n+1\right)^2\frac{\left(n+2\right)^2}{2^2}=\left(\frac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{2}\right)^2$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2\times\left(n+1\right)^2}{4}$.

Exemple 7: (Récurrence) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$\sum_{k=1}^{k=n}\left(2k+1\right)=1+3+5+...+\left(2n+1\right)=\left(n+1\right)^2$.

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons $1+3=4$ et $\left(1+1\right)^2=4$ donc $4=4$.

Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{k=n}\left(2k+1\right)=\left(n+1\right)^2$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\sum_{k=1}^{k=n+1}\left(2k+1\right)=1+3+5+...+\left(2n+1\right)+\left(2n+3\right)=\left(n+2\right)^2$??

On a : $\sum_{k=1}^{k=n+1}\left(2k+1\right)=\sum_{k=1}^{k=n}\left(2k+1\right)+\left(2n+3\right)$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $\sum_{k=1}^{k=n}\left(2k+1\right)=\left(n+1\right)^2$

donc $\sum_{k=1}^{k=n+1}\left(2k+1\right)=\left(n+1\right)^2+\left(2n+3\right)=n^2+2n+1+2n+3=n^2+4n+4$

donc $\sum_{k=1}^{k=n+1}\left(2k+1\right)=\left(n+2\right)^2$ donc P(n+1) est vraie.

Conclusion: Par le principe de récurrence on a : $\sum_{k=1}^{k=n}\left(2k+1\right)=\left(n+1\right)^2\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

Exemple 8: Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};4^n+6n-1$ est divisible par 9

Solution :montrons que : $\exists k\in\mathbb{N}$ / $4^n+6n-1=9k$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $4^0+6\times0-1=0$ est un multiple de 9

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie

c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}$ / $4^n+6n-1=9k$ donc $4^n=9k-6n+1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}$ / $4^{n+1}+6\left(n+1\right)-1=9k'$??

$4^{n+1}+6\left(n+1\right)-1=4\times4^n+6n+6-1$

$=4\times\left(9k-6n+1\right)+6n+6-1=36k+4-24n+6n+6-1$

$=36k+9-18n=9\left(4k+1-2n\right)=9k'$ avec $k'=4k+1-2n$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N};4^n+6n-1$ est divisible par 9

Exemple 9: Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};7^n-1$ est divisible par 6

Solution : 1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $7^0-1=0$ est un multiple de 6
Donc P (0) est vraie.
2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie
c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 7^n-1=6k$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} / 7^{n+1}-1=6k'$??

$7^{n+1}-1=7\times 7^n-1=7^n\times(6+1)-1=6\times 7^n+7^n-1=6\times 7^n+6k$

$7^{n+1}-1=6(7^n+k)=6k'$ avec $k'=7^n+k$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}; 7^n-1$ est divisible par 6

Erreur classique dans les récurrences

Exemple 10 : Pour tout entier naturel n, on considère les deux propriétés suivantes :
P (n) : 10^n-1est divisible par 9
Q (n) : 10n + 1 est divisible par 9
1) Démontrer que si P (n) est vraie alors P (n + 1) est vraie.
2) Démontrer que si Q (n) est vraie alors Q (n + 1) est vraie.
3) Un élève affirme : " Donc P (n) et Q (n) sont vraies pour tout entier naturel n.
Expliquer pourquoi il commet une erreur grave.
4) Démontrer que P (n) est vraie pour tout entier naturel n.
5) Démontrer que Q (n) est fausse pour tout entier naturel n.
On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

Exemple 11 : Soit P(n) la propriété dénie sur $\mathbb{N}$ par :
7^n-1Est divisible par 3
1) Démontrer que si P(n) est vraie alors P (n + 1) est vraie.
2) Que peut-on conclure

Remarques : La rédaction d'une récurrence est assez rigide.
Respectez scrupuleusement la rédaction proposée : donnez un nom à La proposition que vous souhaitez montrer (ici P(n)), respectez les trois étapes (même si souvent l'étape d'initialisation est très facile

Exercice : $a\in\mathbb{R}$ et$b\in\mathbb{R}$ tel que : $a\in\left]-1;1\right[$ et $b\in\left]-1;1\right[$

Montrer que : $-1\prec\dfrac{a+b}{1+ab}\prec 1$

Solution : $-1\prec\dfrac{a+b}{1+ab}\prec 1\Leftrightarrow\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|\prec 1\Leftrightarrow|a+b|\prec|1+ab|$

$\Leftrightarrow|a+b|^2\prec|1+ab|^2\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab\prec 1+a^2b^2+2ab$

Donc : $-1\prec\dfrac{a+b}{1+ab}\prec 1\Leftrightarrow(a^2-1)(1-b^2)\prec 0$

Donc :$a\in\left]-1;1\right[$ et $b\in\left]-1;1\right[\Rightarrow -1\prec a\prec 1$ et $-1\prec b\prec 1$

$\Rightarrow|a|\prec 1$ et $|b|\prec 1\Rightarrow a^2\prec 1$ et $b^2\prec 1\Rightarrow a^2-1\prec 0$ et $1-b^2\succ 0$

$\Rightarrow(a^2-1)(1-b^2)\prec 0$

Donc : $a\in\left]-1;1\right[$ et $b\in\left]-1;1\right[\Rightarrow -1\prec\dfrac{a+b}{1+ab}\prec 1$

Exercice 4 Traduisez les propositions suivantes en langage courant puis déterminer sa négation et la valeur de vérité :

1) $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):x>y$

2) $P:(\exists x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R}):x>y$

3) $P:(\forall x\in\mathbb{R});x^2\geq 4\Rightarrow x\geq 2$

4) $P:(\exists x\in\mathbb{R});x^2=4$

5) $P:(\forall\varepsilon\succ 0);\left(\exists x\in\left\{1+\frac{1}{n};n\in\mathbb{N}^*\right\}\right)/\,x\prec\varepsilon+10$

Solution :

1)Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ il existe au moins un y appartenant à $\mathbb{R}$ tel que x est supérieur strictement a y et $\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R}):x\leq y$

$P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):x>y$ Est une proposition vraie car l'lorsque je prends x je peux trouver y il suffit de prendre : $y=x-1$

2) il existe au moins un y appartenant à $\mathbb{R}$ tel que Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ on a x est supérieur strictement a y et $\overline{P}:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):x\leq y$

P est une proposition fausse car l'lorsque je prends x je peux toujours donner à y la valeur: $y=x+1$

3) $P:(\forall x\in\mathbb{R});x^2\geq 4\Rightarrow x\geq 2$

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ si x^2 est supérieur ou égal à 4 alors x est supérieur ou égal à 2

$\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R});x^2\geq 4$ et $x\prec 2$

P est une proposition fausse car l'lorsque je prends $x=-2$ on a $(-2)^2\geq 4$ et $-2\prec 2$

4) $P:(\exists x\in\mathbb{R});x^2=4$

il existe au moins un y appartenant à $\mathbb{R}$ tel que x^2 est égal à 4

$\overline{P}:(\forall x\in\mathbb{R});x^2\neq 4$

P une proposition vraie car il suffit de prendre : $x=2$

5) $P:(\forall\varepsilon\succ 0);\left(\exists x\in\left\{1+\frac{1}{n};n\in\mathbb{N}^*\right\}\right)/\,x\prec\varepsilon+10$

Pour tout ε supérieur strictement a 0 il existe au moins un x qui s'écrit sous la forme $1+\frac{1}{n}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ tel que x est inferieur strictement a $\varepsilon+10$

$\overline{P}:(\exists\varepsilon\succ 0);\left(\forall x\in\left\{1+\frac{1}{n};n\in\mathbb{N}^*\right\}\right)/\,x\geq\varepsilon+10$

Soit $\varepsilon\succ 0$ $\quad x\prec\varepsilon+10\Leftrightarrow 1+\frac{1}{n}\prec\varepsilon+10\Leftrightarrow\frac{1}{n}\prec\varepsilon+9\Leftrightarrow n\succ\frac{1}{\varepsilon+9}$

Donc pour $n=E\left(\frac{1}{\varepsilon+9}\right)+1$ on prend $x=1+\frac{1}{n}$ et on a $x\prec\varepsilon+10$

P Est donc une proposition vraie

Exercice 5 A l'aide de la méthode des tables de vérité, dites si la formules $Pou\overline{P}$ est une tautologies.

Solution :

P	$\overline{P}$	$Pou\overline{P}$
0	1	1
1	0	1