

Dénombrement

A – Notion d'ensemble

B - Dénombrement

I - Principe fondamental de dénombrement

II - Arrangement avec répétition

III - Arrangement sans répétition

VI – Les combinaisons

V - Formule de binôme de Newton

Notion d'ensemble

1) Définition

- Un **ensemble** est une collection d'objets appelés éléments.
Ensemble des résultats possibles d'un lancé de dé :
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- F est une **partie** (ou est inclus, ou est un sous-ensemble) de E si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E . Cela se note $F \subset E$.
- On note \emptyset l'**ensemble vide** : l'ensemble qui ne contient aucun élément.

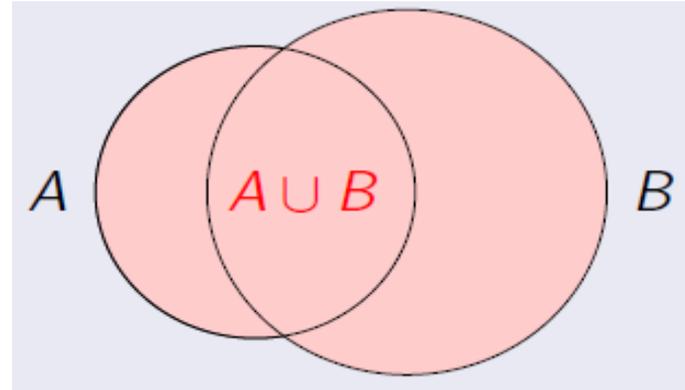
Notion d'ensemble

2) L'union

Définition:

L'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à A ou B ou aux deux est appelé **union** de A et B, noté $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

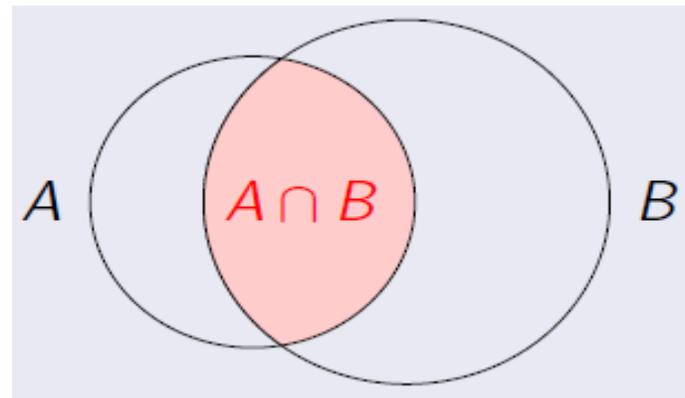


3) L'intersection

Définition:

L'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B est appelé **intersection** de A et B, noté $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$



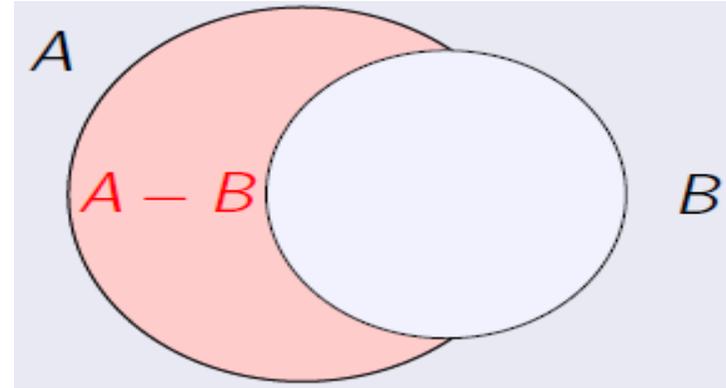
Notion d'ensemble

2) La différence

Définition:

L'ensemble de tous les éléments de A qui n'appartiennent pas à B est appelé **différence** de A et B, noté $A - B$ ou $A \setminus B$

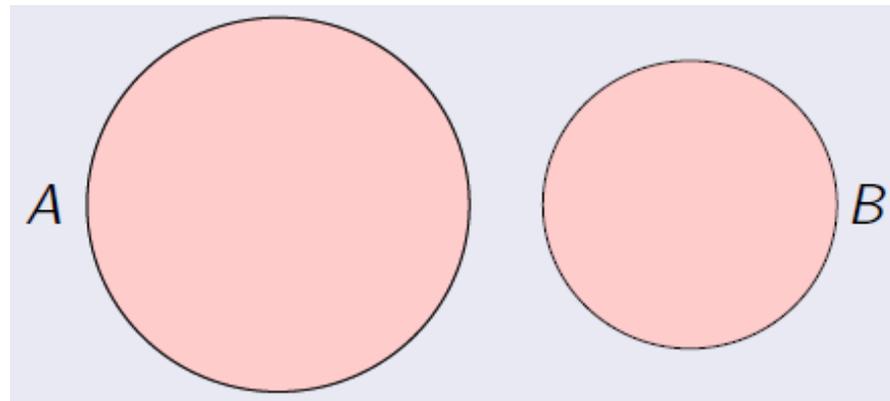
$$A - B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$



3) L'incompatibilité

Définition:

Deux ensembles A et B sont disjoints ou incompatibles s'ils n'ont aucun élément en commun. $A \cap B = \emptyset$



Notion d'ensemble

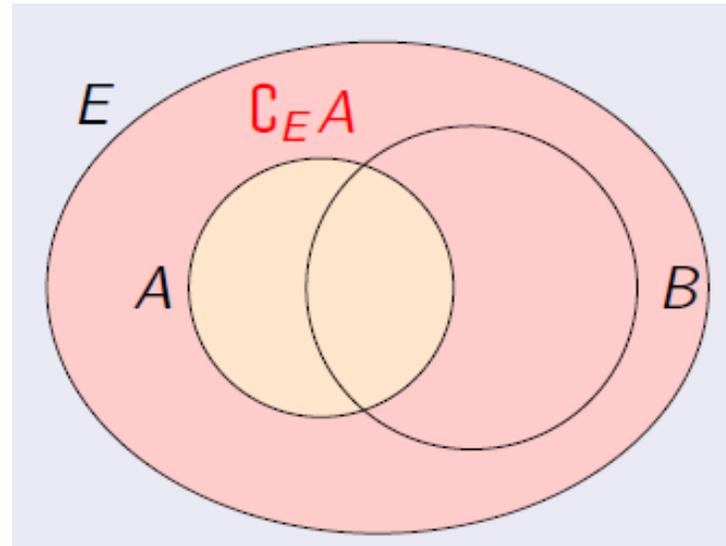
4) Le complémentaire

Définition:

L'ensemble de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A est appelé

Le complémentaire de A dans E , noté \overline{A} alors $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = E$

$$C_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}$$



4) Le produit cartésien

L'ensemble de tous les couples d'un élément de E et d'un élément de F est appelé produit cartésien de E et F noté $E \times F$

Attention $E \times F \neq F \times E$

$$\{1, 2\} \times \{3, 4\} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

$$\{3, 4\} \times \{1, 2\} = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$$

Dénombrement

I - Principe fondamental de dénombrement

1) Définition

Soient n un entier naturel non nul et E un ensemble à n élément .

On dit que E est un ensemble fini.

Le nombre d'éléments d'un ensemble E est appelé Cardinal de E
noté $\text{Card}(E) = n$

Dénombrer un ensemble fini, c'est compter ses éléments, c'est-à-dire calculer son cardinal.

2 - Exemple

Si $A = \{1; 2; 3; a; b; c\}$ alors $\text{Card}(A) = 6$.

Si $A = \emptyset$ il comporte 0 élément alors $\text{Card}(A) = 0$

Dénombrement

3 - Propriétés

Soient A et B deux parties d'un ensemble finis E .

- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$
- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$ si $A \cap B = \phi$
- $\text{Card} (\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$
- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) * \text{Card}(B)$

4 - Exemple

Un centre de loisirs accueille 100 élèves, 53 élèves pratiquent le football, 33 pratiquent le basket-ball et 15 pratiquent le football et le basket-ball.

- 1) Quelle est le nombre d'élèves qui pratiquent au moins un sport?
- 2) Quelle est le nombre d'élèves qui pratiquent le football sans le basket-ball?
- 3) Quelle est le nombre d'élèves qui pratiquent le basket-ball sans le football ?
- 4) Quelle est le nombre d'élèves qui ne pratiquent pas les deux sports?

Dénombrement

Solution:

Soit E l'ensemble des élèves donc $\text{Card}(E) = 100$

A un sous-ensemble de E des élèves qui pratiquent le football
donc $\text{Card}(A) = 53$

B un sous-ensemble de E des élèves qui pratiquent le basket-ball
donc $\text{Card}(B) = 33$ et $\text{Card}(A \cap B) = 15$

$$\begin{aligned} 1) \text{Card}(A \cup B) &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) \\ &= 53 + 33 - 15 = 71 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{On a } \text{Card}(A \cap \bar{B}) + \text{Card}(A \cap B) &= \text{Card}(A) \\ \text{Donc } \text{Card}(A \cap \bar{B}) &= \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B) \\ \text{Donc } \text{Card}(A \cap \bar{B}) &= 53 - 15 = 38 \\ \text{D'où } \text{Card}(A \cap \bar{B}) &= 38 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \text{On a } \text{Card}(B \cap \bar{A}) + \text{Card}(B \cap A) &= \text{Card}(B) \\ \text{Donc } \text{Card}(B \cap \bar{A}) &= \text{Card}(B) - \text{Card}(B \cap A) \\ \text{Donc } \text{Card}(B \cap \bar{A}) &= 33 - 15 = 18 \\ \text{D'où } \text{Card}(B \cap \bar{A}) &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \text{On a } \text{Card}(\overline{A \cup B}) + \text{Card}(A \cup B) &= \text{Card}(E) \\ \text{Donc } \text{Card}(\overline{A \cup B}) &= \text{Card}(E) - \text{Card}(A \cup B) \\ \text{Donc } \text{Card}(\overline{A \cup B}) &= 100 - 71 \\ \text{D'où } \text{Card}(\overline{A \cup B}) &= 29 \end{aligned}$$

Dénombrement

5) Principe multiplicatif

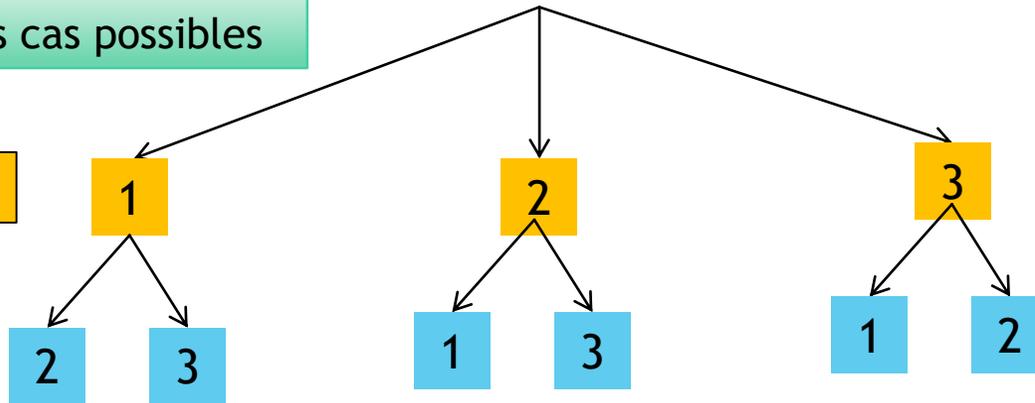
a - Activité

1) Quels sont les nombres de deux chiffres distincts que l'on peut former à partir des chiffres suivants : 1, 2 et 3.

Arbre des cas possibles

Chiffre des unités

Chiffre des dizaines



Il y a **3 choix** possibles pour choisir le chiffre des unités et **2 choix** possibles pour choisir le chiffre des dizaines donc on a $3 \times 2 = 6$ nombres possibles
les nombres formés par deux chiffres parmi les chiffres 1, 2 et 3 **sans répétition sont** :
21; 31; 12; 32; 13; 23.

Dénombrement

2) Quels sont les nombres de **deux chiffres** que l'on peut former à partir des chiffres suivants : 1, 2 et 3.

Arbre des cas possibles

Chiffre des unités

1

2

3

Chiffre des dizaines

1

2

3

1

2

3

1

2

3

Il y a **3 choix** possibles pour choisir le chiffre des unités et **3 choix** possibles pour choisir le chiffre des dizaines donc on a $3 \times 3 = 9$ nombres possibles les nombres formés par deux chiffres parmi les chiffres 1, 2 et 3 **avec répétition** sont: 21; 31; 12; 32; 13; 23; 11; 22; 33.

Dénombrement

b - Principe multiplicatif

Si une expérience peut se décomposer en p opérations élémentaires tels que:

- * La première opération peut être effectuée de n_1 manières différentes.
- * La deuxième opération peut être effectuée de n_2 manières différentes.
- * La troisième opération peut être effectuée de n_3 manières différentes.
- * La $P^{ième}$ opération peut être effectuée de n_p manières différentes.

Alors l'ensemble de toutes ces opérations peut être effectuées de

$$N = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_p \text{ manières différentes.}$$

C-Exemples

1) Dans la classe 2BPCF il y a 21 filles et 12 garçons.

Il faut une fille et un garçon pour représenter la classe dans un événement culturel. Combien de possibilités de choix?

Solution: 21 possibilités pour choisir une fille et 12 possibilités pour choisir un garçon. Il y a $21 \times 12 = 252$ possibilités

Dénombrement

2) Combien de nombres de trois chiffres qu'on peut former avec les chiffres suivants : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; .. ; 9 ?

Solution:

Il y'a 10 possibilités pour le chiffre des **unités**

Il y'a 10 possibilités pour le chiffre des **dizaines**

Il y'a 9 possibilités pour le chiffre des **centaines**

Le nombre de possibilités est: $10 \times 10 \times 9 = 900$

3) On lance une pièce de monnaie 2 fois de suites. Quelle est le possibilités?

Solution:

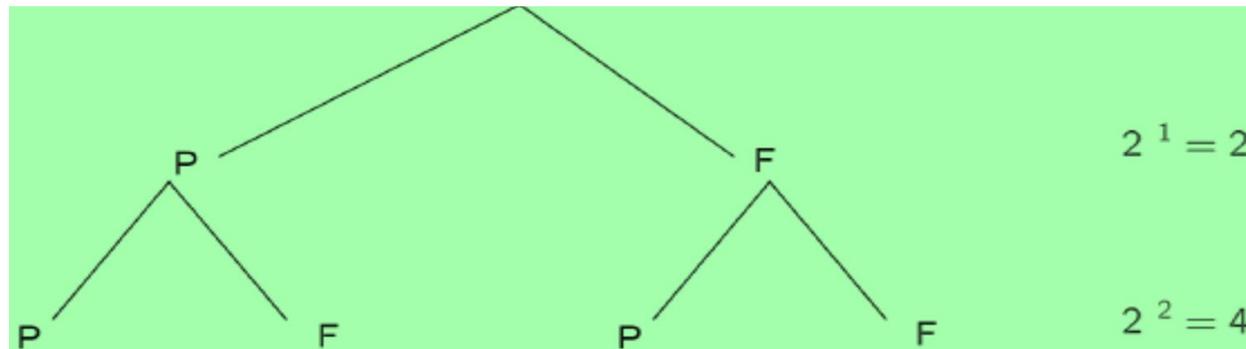
Il y'a 2 possibilités pour le premier jet: P (pile) ou F (face)

Il y'a 2 possibilités pour le deuxième jet: P (pile) ou F (face)

Le nombre de possibilités est $2 \times 2 = 4$

L'ensemble des possibilités est :

$$\Omega = \{PP; FF; PF; FP\}$$



Dénombrement

II - Arrangement avec répétition

1 - Définition

Soit E un ensemble fini, $\text{card}(E) = n$ on pose $E = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ $p \in \mathbb{N}^*$
Chaque élément $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_p)$ de E^p s'appelle un arrangement avec répétition d'ordre p de n éléments.

Exemple: $E = \{1, 2, 3, 4\}$

Les triplets $(1, 1, 2)$; $(1, 4, 2)$; $(2, 3, 2)$... sont des arrangements avec répétition d'ordre 3 de 4 éléments .

Les 5-uplets $(1, 1, 2; 2; 3)$; $(1, 3; 4, 4, 2)$... sont des arrangements avec répétition d'ordre 5 de 4 éléments

2 - Propriété

Soit E un ensemble fini, $\text{card}(E) = n$, le nombre des arrangements avec répétition d'ordre p de n éléments est le cardinal de E^p qui est $\text{card}(E^p) = (\text{card}E)^p$

Dénombrement

3 - Exemple

Une urne contient: 6 boules blanches, 4 boules noires et 2 boules rouges

On tire arbitrairement, successivement et avec remise 3 boules de l'urne.

- 1) Quel est le nombre des cas possibles?
- 2) Dénombrer le nombre des éventualités des événements suivants:
 - A" les 3 boules tirées sont blanches"
 - B" les 3 boules tirées sont de la même couleur"
 - C" les 3 boules tirées sont de couleurs différentes"
 - D" les 3 boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux"
 - E" parmi les boules tirées il y a au moins une boule noire"
 - G" parmi les boules tirées il y a au plus une boule rouge"

Dénombrement

Solution:

6 B ; 4 N ; 2R

Tirage successif de 3 boules avec remise parmi 12

1) Quel est le nombre des cas possibles ?

$$\text{Card}(\Omega) = 12^3 = 1728$$

2) Dénombrer le nombre des éventualités des événements suivants:

A "les 3 boules tirées sont blanches"

$$\text{Card}(A) = 6^3 = 216$$

B" les 3 boules tirées sont de la même couleur"

$$\text{Card}(A) = 6^3 + 4^3 + 2^3 = 288$$

C" les 3 boules tirées sont de couleurs différentes"

L'événement contraire de C est \bar{C} « les 3 boules tirées sont de la même couleur »

Donc $\bar{C} = B$

On sait que $\text{card}(C) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(\bar{C})$ donc $\text{card}(C) = 1728 - 288 = 1440$

D'où $\text{card}(C) = 1440$

Dénombrement

D'' les 3 boules tirées sont de couleur différentes deux à deux''

$$\text{Card}(\mathbf{D}) = 6(6^1 \times 4^1 \times 2^1) = 288$$

Pour ordonner les 3 couleurs dans un triplet on a 6 possibilités

(B ; N ; R) ; (B ; R ; N) ; (N ; B ; R) ; (N ; R ; B) ; (R ; N ; B) ; (R ; B ; N)

E'' parmi les boules tirées il y a au moins une boule noire''

L'événement contraire de E est \bar{E} « parmi les boules tirées il n'y a pas de boule noire''

$$\text{Card}(\bar{E}) = 8^3 = 512$$

On sait que $\text{card}(E) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(\bar{E})$ donc $\text{card}(E) = 1728 - 288 = 1216$

D'où $\text{card}(E) = 1216$

G'' parmi les boules tirées il y a au plus une boule rouge''

Pour ordonner la boule rouge dans un triplet on a 3 possibilités

$$\text{Card}(G) = 3(2^1 \times 10^2) + 10^3 = 1600$$

Dénombrement

III - Arrangement sans répétition

1 - Définition

Soit E un ensemble fini, $\text{card}(E) = n$ on pose $E = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$
Chaque élément $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_p)$ de E^p où $(1 \leq p \leq n)$ sont différents deux à deux s'appelle un arrangement sans répétition d'ordre p de n éléments.

Exemple: $E = \{1, 2, 3, 4\}$

Les triplets $(1, 3, 2)$; $(1, 4, 2)$; $(4, 3, 2)$... sont des arrangements sans répétition d'ordre 3 de 4 éléments .

On ne peut pas avoir des arrangements sans répétition d'ordre 5 de 4 éléments

Dénombrement

2 - Propriété

Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ le nombre des arrangements sans répétition d'ordre p de n éléments. ($p \leq n$) est :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)$$

Exercice

Calculer les entiers suivant : A_{10}^3 ; A_7^5 et A_4^4

3 - Permutation

Cas particulier :

Si $p = n$; l'arrangements sans répétition d'ordre n de n éléments s'appelle une permutation d'ordre n

le nombre des permutation d'ordre n est $A_n^n = n \times (n-1) \times \dots \times (n-n+1) = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$

ce nombre entier naturel s'appelle n **factoriel** ; on le note $n!$

Dénombrement

4 - Exemple

Une urne contient: 6 boules blanches, 4 boules noires et 2 boules rouges

On tire arbitrairement, successivement et sans remise 3 boules de l'urne.

- 1) Quel est le nombre des cas possibles?
- 2) Dénombrer le nombre des éventualités des événements suivants:
 - A" les 3 boules tirées sont blanches"
 - B" les 3 boules tirées sont de la même couleur"
 - C" les 3 boules tirées sont de couleurs différentes"
 - D" les 3 boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux"
 - E" parmi les boules tirées il y a au moins une boule noire"
 - F" parmi les boules tirées il y a au plus une boule rouge"

Dénombrement

Solution:

6 B ; 4 N ; 2 R

Tirage successif de 3 boules sans remise parmi 12

1) Quel est le nombre des cas possibles ?

$$\text{Card}(\Omega) = \mathbf{A}_{12}^3 = 1320$$

calculatrice

$$12 \text{ npr } 3 = 1320$$

2) Dénombrer le nombre des éventualités des événements suivants:

A "les 3 boules tirées sont blanches"

$$\text{Card}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_6^3 = 120$$

B" les 3 boules tirées sont de la même couleur"

$$\text{Card}(\mathbf{B}) = \mathbf{A}_6^3 + \mathbf{A}_4^3 = 144$$

C" les 3 boules tirées sont de couleurs différentes"

L'événement contraire de C est \bar{C} « les 3 boules tirées sont de la même couleur »

Donc $\bar{C} = \mathbf{B}$

On sait que $\text{card}(\mathbf{C}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(\bar{C})$ donc $\text{card}(\mathbf{C}) = 1320 - 144 = 1176$

D'où $\text{card}(\mathbf{C}) = 1176$

Dénombrement

D" les 3 boules tirées sont de couleur différentes deux à deux"

$$\text{Card}(\mathbf{D}) = 6(\mathbf{A}_6^1 \times \mathbf{A}_4^1 \times \mathbf{A}_2^1) = 288$$

Pour ordonner les 3 couleurs dans un triplet on a 6 possibilités

(B ; N ; R) ; (B ; R ; N) ; (N ; B ; R) ; (N ; R ; B) ; (R ; N ; B) ; (R ; B ; N)

E" parmi les boules tirées il y a au moins une boule noire"

L'événement contraire de E est \bar{E} « parmi les boules tirées il n'y a pas de boule noire"

$$\text{Card}(\bar{E}) = \mathbf{A}_8^3 = 336$$

On sait que $\text{card}(E) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(\bar{E})$ donc $\text{card}(E) = 1320 - 336 = 984$

D'où $\text{card}(E) = 984$

G" parmi les boules tirées il y a au plus une boule rouge"

Pour ordonner la boule rouge dans un triplet on a 3 possibilités

$$\text{Card}(G) = 3(\mathbf{A}_2^1 \times \mathbf{A}_{10}^2) + \mathbf{A}_{10}^3 = 1260$$

Dénombrement

VI – Les combinaisons

1 - Définition

Soit E un ensemble fini, $\text{card}(E) = n$ tout sous ensemble A de E contenant p éléments ($p \leq n$) s'appelle une combinaison d'ordre p de n éléments.

Dans un ensemble l'ordre d'écriture des éléments n'est pas important, $\{x, y, z\} = \{y, x, z\}$ ce qui n'est pas le cas pour les arrangements : $(x, y, z) \neq (y, x, z)$

2 - Propriété

Soit E un ensemble fini, $\text{card } E = n$ le nombre de combinaisons d'ordre p de n éléments est : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

Dénombrement

3 - Propriétés

Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$:

$$\textcircled{1} A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$\textcircled{2} C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\textcircled{3} C_n^{n-p} = C_n^p$$

$$\textcircled{4} C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$$

4 - Exemple

Une urne contient: 6 boules blanches, 4 boules noires et 2 boules rouges
On tire arbitrairement, simultanément 3 boules de l'urne.

- 1) Quel est le nombre des cas possibles?
- 2) Dénombrer le nombre des éventualités des événements suivants:
 - A" les 3 boules tirées sont blanches"
 - B" les 3 boules tirées sont de **la même couleur**"
 - C" les 3 boules tirées sont de **couleurs différentes**"
 - D" les 3 boules tirées sont de **couleurs différentes deux à deux**"
 - E" parmi les boules tirées il y a **au moins** une boule noire"
 - G" parmi les boules tirées il y a **au plus** une boule rouge"

Dénombrement

Solution:

6 B ; 4 N ; 2 R

Tirage simultané de 3 boules parmi 12

1) Quel est le nombre des cas possibles ?

$$\text{Card}(\Omega) = C_{12}^3 = 220$$

calculatrice

$$12 \text{ ncr } 3 = 220$$

2) Dénombrer le nombre des éventualités des événements suivants:

A "les 3 boules tirées sont blanches"

$$\text{Card}(A) = C_6^3 = 20$$

B" les 3 boules tirées sont de la même couleur"

$$\text{Card}(B) = C_6^3 + C_4^3 = 24$$

C" les 3 boules tirées sont de couleurs différentes"

L'événement contraire de C est \bar{C} « les 3 boules tirées sont de la même couleur »

Donc $\bar{C} = B$

On sait que $\text{card}(C) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(\bar{C})$ donc $\text{card}(C) = 220 - 24 = 196$

D'où $\text{card}(C) = 196$

Dénombrement

D" les 3 boules tirées sont de couleur différentes deux à deux"

$$\text{Card}(D) = C_6^1 \times C_4^1 \times C_2^1 = 48$$

E" parmi les boules tirées il y a au moins une boule noire"

L'événement contraire de E est \bar{E} « parmi les boules tirées il n'y a pas de boule noire"

$$\text{Card}(\bar{E}) = C_8^3 = 56$$

On sait que $\text{card}(E) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(\bar{E})$ donc $\text{card}(E) = 220 - 56 = 164$

D'où $\text{card}(E) = 164$

G" parmi les boules tirées il y a au plus une boule rouge"

$$\text{Card}(G) = C_2^1 \times C_{10}^2 + C_{10}^3 = 210$$

Dénombrément

V - Formule de binôme de Newton

$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$$

ce qui peut également être noté :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p$$

Exemple : Développer $(1+x)^5$ et $(1-x)^5$ à l'aide de la formule du binôme.

Dénombrement

Triangle de Pascal

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \quad (\text{formule de Pascal})$$

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Dénombrement

Tirage

Successif
avec remise

$$n^p$$

Ordre important

Successif
sans remise

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Ordre important

Simultané

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

Ordre pas important