

# PRIMITIVES

## EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

**Dérivée et primitives**

- 1) Calculez la dérivée de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 3x^3 - 9x + 1$ .
- 2) Déduisez-en deux primitives de la fonction  $g$  définie par  $g(x) = 9x^2 - 9$
- 3) Déterminer le sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

**Exercice n°2 à 11 – Primitives sans fonction logarithme**

Déterminer une primitive de  $f$  sur un intervalle contenu dans son ensemble de définition

Exercice n°2. Usage des tableaux de primitives usuelles

- |                             |                                    |                               |                                 |
|-----------------------------|------------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| 1) $f(x) = 2x + 1$          | 2) $f(x) = 10x^4 + 6x^3 - 1$       | 3) $f(x) = (x-1)(x+3)$        | 4) $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$ |
| 5) $f(x) = \frac{-4}{3x^5}$ | 6) $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ | 7) $f(x) = \sin x - 2 \cos x$ |                                 |

Exercice n°3. Primitive et constante

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = 3x - 1 + \frac{2}{x^2}$ .

Déterminer la primitive  $F$  de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  qui s'annule pour  $x=1$ .

Exercice n°4.

Trouver la primitive  $F$  de  $f$  sur  $I$  vérifiant la condition donnée

- 1)  $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$      $I = \mathbb{R}$      $F(1) = 0$
- 2)  $f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$      $I = ]0; +\infty[$      $F(1) = 1$

**Exercices n°5 à n°8 : Déterminer une primitive des fonctions données**

Exercice n°5. Forme  $u'u^n$

1) $f(x) = 3(3x+1)^4$	2) $f(x) = 16(4x-1)^3$	3) $f(x) = (2x+7)^6$	4) $f(x) = (6x-2)(3x^2-2x+3)^5$
5) $f(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$	6) $f(x) = \sin x \cos x$		

Exercice n°6. Forme  $\frac{u'}{u^2}$

1) $f(x) = \frac{4}{(1+4x)^2}$	2) $f(x) = \frac{6}{(2x+1)^2}$	3) $f(x) = \frac{1}{(4x+3)^2}$	4) $f(x) = \frac{-1}{(2-x)^2}$
5) $f(x) = \frac{2}{(4-3x)^2}$	6) $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$	7) $f(x) = \frac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2}$	8) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$
9) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$			

Exercice n°7.

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{3x+4}{(x+1)^3}$ .

- 1) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout  $x \neq -1$ ,  $f(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)^3}$ .
- 2) En déduire une primitive  $F$  de  $f$  sur  $]-1; +\infty[$ .

Exercice n°8. Forme  $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

1)  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x+2}}$

2)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-5x}}$

3)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$

4)  $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

5)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

6)  $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$

Exercice n°9.

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = x\sqrt{x}$ .

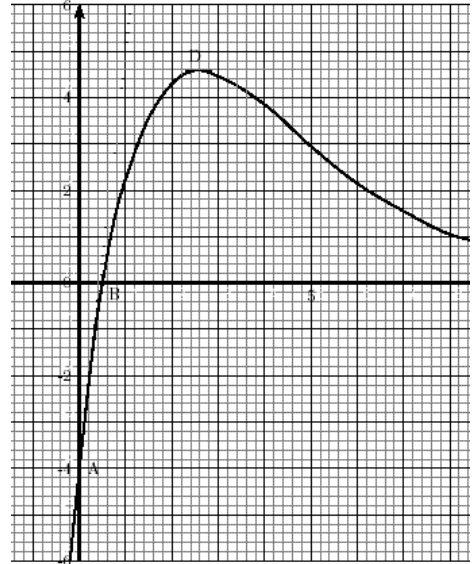
1) Calculez la dérivée de  $g$  sur  $]0; +\infty[$

2) soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x}$ .

Déduisez de la première question une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$

Exercice n°10.

La courbe  $(C)$  donnée ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormal d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .



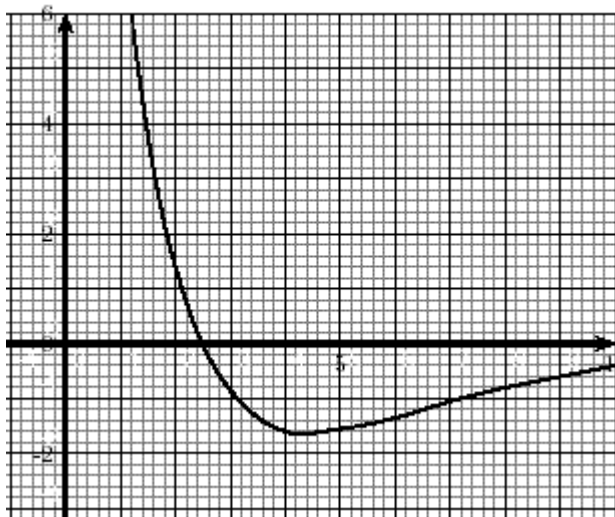
1) Pour chacune des affirmations ci-dessous indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse :

a. Toute primitive de  $f$  s'annule pour  $0,5$ .

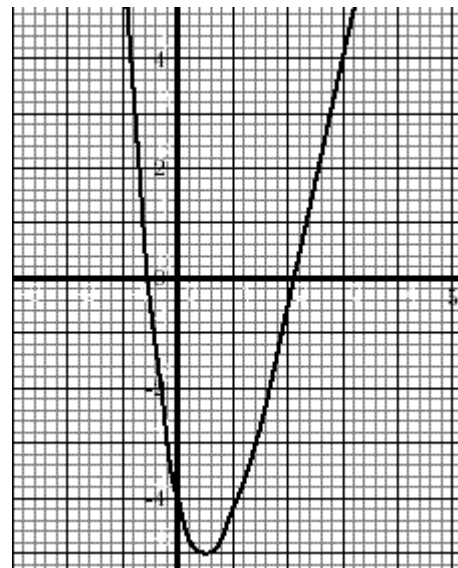
b. Toute primitive de  $f$  est décroissante sur  $[0 ; 0,5]$ .

2. Parmi les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  données ci-dessous, l'une est la représentation graphique d'une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Indiquer laquelle en précisant les raisons de votre choix.

Courbe 1



Courbe 2



## Exercice n°11 à 16 – Primitives utilisant les fonctions logarithmes et exponentielles

### Exercice n°11.

Déterminez une primitive de la fonction  $f$  proposée sur l'intervalle  $I$  donné :

- 1)  $f(x) = x^2 - 5x + \frac{1}{x}$  sur  $I = ]0; +\infty[$
- 2)  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$  sur  $I = ]0; +\infty[$
- 3)  $f(x) = \frac{7}{x} + \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$  sur  $I = ]0; +\infty[$
- 4)  $f(x) = \frac{3}{3x-4}$  sur  $I = \left] \frac{4}{3}; +\infty \right[$
- 5)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  sur  $I = ]-1; +\infty[$
- 6)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  sur  $I = ]-\infty; -1[$
- 7)  $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$  sur  $I = ]2; +\infty[$
- 8)  $f(x) = \frac{1}{3x-5}$  sur  $I = ]2; +\infty[$
- 9)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$  sur  $\mathbb{R}$
- 10)  $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$  sur  $I = ]-1; 1[$

### Exercice n°12.

On considère la fonction définie sur  $I = [4; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 4}{x-2}$

- 1) Trouver trois réels  $a, b,$  et  $c$  tels que  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$
- 2) En déduire une primitive de  $f$  sur  $[4; +\infty[$

### Exercice n°13.

Déterminez une primitive de la fonction  $f$  proposée sur l'intervalle  $I$  donné :

- 1)  $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$  sur  $I = \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$
- 2)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  sur  $I = [1; +\infty[$
- 3)  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$  sur  $I = ]1; +\infty[$
- 4)  $f(x) = \tan x$  sur  $I = \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$

### Exercice n°14.

Déterminez une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f$  donnée :

1) $f(x) = \frac{1}{4}e^x$	2) $f(x) = e^{-x}$	3) $f(x) = e^{2x+3}$	4) $f(x) = xe^{x^2}$	5) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$
----------------------------	--------------------	----------------------	----------------------	-------------------------------

### Exercice n°15.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x+2)e^x$

Déterminez les nombres  $a$  et  $b$  tels que la fonction  $F$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , par  $F(x) = (ax+b)e^x$  soit une primitive de  $f$ .

### Exercice n°16.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{3}{e^{-x}+1}$

- 1) Vérifiez que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , on a  $f(x) = \frac{3e^x}{e^x+1}$
- 2) Déduisez en la primitive  $F$  de  $f$  qui s'annule pour  $x=0$

## PRIMITIVES - CORRECTION

### Exercice n°1

1)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 3 \times 3x^2 - 9 \times 1 = 9x^2 - 9$ .

2) Si on note  $g$  la fonction définie par  $g(x) = 9x^2 - 9$ , alors grâce à la question 1), on dispose d'une primitive de  $g$  en la somme de la fonction  $f$ . Une autre primitive de  $g$  serait la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = f(x) + k$ , où  $k$  est une constante réelle quelconque. Ainsi  $f(x) = 3x^3 - 9x + 1 + 50 = 3x^3 - 9x + 51$  est une autre primitive de  $g$

3) Puisque  $g(x) = 9x^2 - 9 = 9(x^2 - 1) = 9(x-1)(x+1)$ , on peut établir le signe de  $g(x)$ , donc le sens de variation de  $f$ : Pour  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$ ,  $g(x) > 0$  et pour  $x \in ]-1; 1[$ ,  $g(x) < 0$ , donc  $f$  est strictement croissante sur  $]-\infty; -1[$ , strictement décroissante sur  $]-1; 1[$ , et strictement croissante sur  $]1; +\infty[$ .

### Exercice n°2

1) La fonction  $f$  définie par  $f(x) = 2x + 1$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que fonction affine, donc il existe une primitive

définie sur  $\mathbb{R}$  par 
$$F(x) = 2 \times \frac{x^2}{2} + 1 \times x = x^2 + x$$

2) La fonction  $f$  définie par  $f(x) = 10x^4 + 6x^3 - 1$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que fonction polynôme, donc il existe une

primitive définie sur  $\mathbb{R}$  par 
$$F(x) = 10 \times \frac{x^5}{5} + 6 \times \frac{x^4}{4} - 1 \times x = 2x^5 + \frac{3x^4}{2} - x$$

3) La fonction  $f$  définie par  $f(x) = (x-1)(x+3) = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que

fonction polynôme, donc il existe une primitive définie sur  $\mathbb{R}$  par 
$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 2 \times \frac{x^2}{2} - 3 \times x = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$$

4) La fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$  est continue sur  $]0; +\infty[$  en tant que somme de fonctions qui le sont, donc il

existe une primitive définie sur  $]0; +\infty[$  par 
$$F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3}$$

5) La fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{-4}{3x^5} = -\frac{4}{3}x^{-5}$  est continue sur  $]0; +\infty[$  en tant que somme de fonctions qui le sont,

donc il existe une primitive définie sur  $]0; +\infty[$  par 
$$F(x) = -\frac{4}{3} \times \frac{x^{-5+1}}{-5+1} = -\frac{4}{3} \times \frac{x^{-4}}{-4} = \frac{x^{-4}}{3} = \frac{1}{3x^4}$$

6) La fonction  $f$  définie par  $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$  est continue sur  $]0; +\infty[$  en tant que somme de fonctions qui le sont, donc il

existe une primitive définie sur  $]0; +\infty[$  par 
$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x}$$

7) La fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sin x - 2 \cos x$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de fonctions qui le sont, donc il

existe une primitive définie sur  $\mathbb{R}$  par 
$$F(x) = -\cos x - 2 \sin x$$

### Exercice n°3

$f$  est continue sur  $]0; +\infty[$  en tant que somme de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur  $]0; +\infty[$  définies par

$$F(x) = \frac{3x^2}{2} - x - \frac{2}{x} + k, k \in \mathbb{R}.$$

On cherche  $k$  pour que  $F(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - 1 - \frac{2}{1} + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$

La primitive  $F$  de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  qui s'annule pour  $x=1$  est donc 
$$F(x) = \frac{3x^2}{2} - x - \frac{2}{x} + \frac{3}{2}$$

#### Exercice n°4

1)  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que fonction polynôme donc admet des primitives définies sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + k, k \in \mathbb{R}$ . On cherche  $k$  pour que  $F(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + k = 0 \Leftrightarrow \frac{7}{12} + k = 0$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{7}{12}. \text{ La primitive } F \text{ de } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ qui vérifie } F(1)=0 \text{ est donc } F(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{7}{12}$$

2)  $f$  est continue sur  $]0; +\infty[$  en tant que somme de fonctions qui le sont, donc admet des primitives définies sur  $]0; +\infty[$

par  $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + k, k \in \mathbb{R}$ . On cherche  $k$  pour que  $F(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{1} - 2\sqrt{1} + k = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} + k = 0$

$$\Leftrightarrow k = \frac{5}{2}. \text{ La primitive } F \text{ de } f \text{ sur } ]0; +\infty[ \text{ qui vérifie } F(1)=1 \text{ est donc } F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + \frac{5}{2}$$

#### Exercice n°5

1)  $f(x) = 3(3x+1)^4$ .  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de fonctions qui le sont, et  $f(x) = u'(x)(u(x))^4$

où  $u(x) = 3x+1 \Rightarrow u'(x) = 3$ . Ainsi une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $f$  est définie par  $F(x) = \frac{(u(x))^5}{5} = \frac{(3x+1)^5}{5}$

2)  $f(x) = 16(4x-1)^3$ .  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4 \times 4(4x-1)^3$ , donc de la forme  $f(x) = 4u'(x)(u(x))^3$ , où  $u(x) = 4x-1 \Rightarrow u'(x) = 4$ . Ainsi une primitive sur

$\mathbb{R}$  de  $f$  est définie par  $F(x) = \cancel{4} \times \frac{(u(x))^4}{\cancel{4}} = (4x-1)^4$

3)  $f(x) = (2x+7)^6$ .  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que puissance d'une fonction qui l'est, et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times (2x+7)^6$ , donc de la forme  $f(x) = \frac{1}{2}u'(x)(u(x))^6$ , où  $u(x) = 2x+7 \Rightarrow u'(x) = 2$ . Ainsi une primitive

sur  $\mathbb{R}$  de  $f$  est définie par  $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(u(x))^7}{7} = \frac{(2x+7)^7}{14}$

4)  $f(x) = (6x-2)(3x^2-2x+3)^5$ .  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de fonctions qui le sont, et de la forme  $f(x) = u'(x)(u(x))^5$ , où  $u(x) = 3x^2-2x+3 \Rightarrow u'(x) = 6x-2$ . Ainsi une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $f$  est définie par

$$F(x) = \frac{(u(x))^6}{6} = \frac{(3x^2-2x+3)^6}{6}$$

5)  $f(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$ .  $f$  est définie sur  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$  et continue sur chacun des intervalles  $]-\infty; 0[$  et  $]0; +\infty[$  en

tant que produit et puissance de fonctions qui le sont, et pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $f(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$ , donc de la

forme  $f(x) = -u'(x) \times (u(x))^4$ , donc  $F(x) = -\frac{(u(x))^5}{5} = -\frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^5$

6)  $f(x) = \sin x \cos x$ .  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos x \sin x$ , donc de la forme  $f(x) = u'(x)u(x)$ , où  $u(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$ . Ainsi une primitive sur  $\mathbb{R}$

de  $f$  est définie par  $F(x) = \frac{(u(x))^2}{2} = \frac{(\sin x)^2}{2}$

### Exercice n°6

1)  $f(x) = \frac{4}{(1+4x)^2}$   $f$  est définie et continue sur  $\left] -\frac{1}{4}; +\infty[ \right.$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le

dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout  $x \in \left] -\frac{1}{4}; +\infty[ \right.$ ,  $f$  est de la forme  $f(x) = \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$ , donc  $f$  admet une

primitive sur  $\left] -\frac{1}{4}; +\infty[ \right.$  définie par  $F(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{1+4x}$

2)  $f(x) = \frac{6}{(2x+1)^2}$   $f$  est définie et continue sur  $\left] -\frac{1}{2}; +\infty[ \right.$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le

dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout  $x \in \left] -\frac{1}{2}; +\infty[ \right.$ ,  $f(x) = \frac{3 \times 2}{(2x+1)^2}$  est de la forme  $f(x) = \frac{3 \times u'(x)}{(u(x))^2}$ , donc

$f$  admet une primitive sur  $\left] -\frac{1}{2}; +\infty[ \right.$  définie par  $F(x) = -\frac{3}{u(x)} = -\frac{3}{2x+1}$

3)  $f(x) = \frac{1}{(4x+3)^2}$   $f$  est définie et continue sur  $\left] -\frac{3}{4}; +\infty[ \right.$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le

dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout  $x \in \left] -\frac{3}{4}; +\infty[ \right.$ ,  $f(x) = \frac{\frac{1}{4} \times 4}{(4x+3)^2}$  est de la forme  $f(x) = \frac{1}{4} \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$ ,

donc  $f$  admet une primitive sur  $\left] -\frac{3}{4}; +\infty[ \right.$  définie par  $F(x) = -\frac{1}{4} \frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{4(4x+3)}$

4)  $f(x) = \frac{-1}{(2-x)^2}$   $f$  est définie et continue sur  $]2; +\infty[$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne

s'annulant pas, et pour tout  $x \in ]2; +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$  ou  $u(x) = 2-x \Rightarrow u'(x) = -1$  donc  $f$  admet une primitive

sur  $]2; +\infty[$  définie par  $F(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{2-x}$

5)  $f(x) = \frac{2}{(4-3x)^2}$   $f$  est définie et continue sur  $\left] \frac{4}{3}; +\infty[ \right.$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur

ne s'annulant pas, et pour tout  $x \in \left] \frac{4}{3}; +\infty[ \right.$ ,  $f(x) = \frac{\left(-\frac{2}{3}\right) \times (-3)}{(4-3x)^2}$  est de la forme  $f(x) = -\frac{2}{3} \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$ , donc  $f$  admet

une primitive sur  $\left] \frac{4}{3}; +\infty[ \right.$  définie par  $F(x) = \frac{2}{3} \frac{1}{u(x)} = \frac{2}{3(4-3x)}$

6)  $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$   $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne

s'annulant pas (le discriminant du trinôme  $x^2+x+1$  est strictement négatif), et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f$  est de la forme

$f(x) = \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$ , où  $u(x) = x^2+x+1 \Rightarrow u'(x) = 2x+1$  donc  $f$  admet une primitive sur  $\mathbb{R}$  définie par

$F(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{x^2+x+1}$

7)  $f(x) = \frac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2}$   $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{2;3\}$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le

dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2;3\} = ]-\infty; 2[ \cup ]2; 3[ \cup ]3; +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{2(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}$  donc de

la forme  $f(x) = \frac{2u'(x)}{(u(x))^2}$ , où  $u(x) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow u'(x) = 2x - 5$  donc  $f$  admet une primitive sur  $]3; +\infty[$  (ou

n'importe lequel des trois intervalles de son ensemble de définition), définie par  $F(x) = -\frac{2}{u(x)} = -\frac{2}{x^2 - 5x + 6}$

8)  $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$   $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le

dénominateur ne s'annulant pas, et pour  $x$  appartenant à l'un des intervalles  $]k\pi; (k+1)\pi[$ ,  $f$  étant de la forme

$f(x) = \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$ , où  $u(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$ , elle admet une primitive sur chaque intervalle  $]k\pi; (k+1)\pi[$

définie par  $F(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{\sin x}$

9)  $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$   $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le

dénominateur ne s'annulant pas, et pour  $x$  appartenant à l'un des intervalles  $]k\frac{\pi}{2}; (k+1)\frac{\pi}{2}[$ ,  $f$  étant de la forme

$f(x) = \frac{-u'(x)}{(u(x))^2}$ , où  $u(x) = \cos x \Rightarrow u'(x) = -\sin x$ , elle admet une primitive sur chaque intervalle  $]k\frac{\pi}{2}; (k+1)\frac{\pi}{2}[$

définie par  $F(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{\cos x}$

### Exercice n°7

1) Pour tout  $x \neq -1$ ,  $\frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)^3} = \frac{a(x+1)+b}{(x+1)^3} = \frac{ax+a+b}{(x+1)^3}$ . Ainsi  $\frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)^3} = f(x)$  si et seulement

si pour tout  $x \neq -1$ ,  $ax+a+b = 3x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a+b=4 \Leftrightarrow b=1 \end{cases}$  Ainsi, pour tout  $x \neq -1$ ,  $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$

2)  $f$  est continue sur l'intervalle  $] -1; +\infty[$  en tant que somme de deux fonctions qui le sont, donc elle admet des primitives

$F$  sur  $] -1; +\infty[$ . Puisque la fonction  $x \rightarrow \frac{3}{(x+1)^2}$  est de la forme  $x \rightarrow \frac{3u'(x)}{(u(x))^2}$ , où  $u(x) = x+1 \Rightarrow u'(x) = 1$ , une de

ses primitives sur  $] -1; +\infty[$  est la fonction  $x \rightarrow -\frac{3}{u(x)} = -\frac{3}{x+1}$ . Puisque la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{(x+1)^3} = (x+1)^{-3}$  est de la

forme  $x \rightarrow u'(x)(u(x))^{-3}$ , où  $u(x) = x+1 \Rightarrow u'(x) = 1$ , une de ses primitives sur  $] -1; +\infty[$  est la fonction

$x \rightarrow \frac{u(x)^{-3+1}}{-3+1} = -\frac{1}{2}u(x)^{-2} = -\frac{1}{2u(x)^2} = -\frac{1}{2(x+1)^2}$ . On déduit donc qu'une primitive de  $f$  sur  $] -1; +\infty[$  est la

fonction  $F$  définie sur  $] -1; +\infty[$  par  $F(x) = -\frac{3}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2}$

### Exercice n°8

1)  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x+2}}$   $f$  est définie et continue sur  $]-\frac{2}{3}; +\infty[$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour  $x \in ]-\frac{2}{3}; +\infty[$ ,  $f$  étant de la forme  $f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ , où  $u(x) = 3x+2 \Rightarrow u'(x) = 3$ , elle

admet une primitive sur  $]-\frac{2}{3}; +\infty[$  définie par  $F(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{3x+2}$

2)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-5x}}$   $f$  est définie et continue sur  $]-\infty; \frac{2}{5}[$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour  $x \in ]-\infty; \frac{2}{5}[$ ,  $f(x) = -\frac{1}{5} \times \frac{-5}{\sqrt{2-5x}}$ .  $f$  étant de la forme  $f(x) = -\frac{1}{5} \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ , où

$u(x) = 2-5x \Rightarrow u'(x) = -5$ , elle admet une primitive sur  $]-\infty; \frac{2}{5}[$  définie par  $F(x) = -\frac{1}{5} \times 2\sqrt{u(x)} = -\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$

3)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$   $f$  est définie et continue sur  $]\frac{3}{2}; +\infty[$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour  $x \in ]\frac{3}{2}; +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{2x-3}}$ .  $f$  étant de la forme  $f(x) = \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ , où

$u(x) = 2x-3 \Rightarrow u'(x) = 2$ , elle admet une primitive sur  $]\frac{3}{2}; +\infty[$  définie par  $F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{u(x)} = \sqrt{2x-3}$

4)  $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$   $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas (le discriminant du trinôme  $x^2+x+1$  est strictement négatif), et pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f$  étant de la forme  $f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ , où  $u(x) = x^2+x+1 \Rightarrow u'(x) = 2x+1$ , elle admet une primitive sur  $\mathbb{R}$  définie par

$F(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{x^2+x+1}$

5)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$   $f$  est définie et continue sur chacune des intervalles  $]-\infty; -1[$  et  $]1; +\infty[$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$ .  $f$  étant de la

forme  $f(x) = \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ , où  $u(x) = x^2-1 \Rightarrow u'(x) = 2x$ , elle admet une primitive sur chacun des intervalles  $]-\infty; -1[$

et  $]1; +\infty[$  définie par  $F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{u(x)} = \sqrt{x^2-1}$

6)  $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$   $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f$  étant de la forme  $f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ , où  $u(x) = 2+\sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$ , elle admet une

primitive sur  $\mathbb{R}$  définie par  $F(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{2+\sin x}$



### Exercice n°9

1)  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,

$$g'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

2) Puisque  $g'(x) = \frac{3}{2}f(x)$ , on déduit que  $f(x) = \frac{2}{3}g'(x)$ . Une primitive sur  $]0; +\infty[$  de  $f$  est donc la fonction définie

$$\text{par } \boxed{F(x) = \frac{2}{3}g(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}}$$

### Exercice n°10

1) a) FAUX.  $f(0,5) = 0$ , mais cela n'influe pas sur le signe de ses primitives

b) VRAI. Puisque  $f$  est négative sur  $[0; 0,5]$  et positive sur  $[0,5; +\infty[$ , toute primitive de  $f$  est décroissante sur  $[0; 0,5]$  et croissante sur  $[0,5; +\infty[$

2) C'est la **courbe 2** qui correspond à la représentation graphique de toute primitive de  $f$ .

### Exercice n°11

1)  $f(x) = x^2 - 5x + \frac{1}{x}$ .  $f$  est continue sur  $]0; +\infty[$  en tant que somme de fonctions qui le sont, donc admet des

primitives sur  $]0; +\infty[$ , et pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $\boxed{F(x) = \frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + \ln(|x|) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + \ln(x)}$  puisque  $x \in ]0; +\infty[$

2)  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ .  $f$  est continue sur  $]0; +\infty[$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne

s'annulant pas, donc admet des primitives sur  $]0; +\infty[$ , et pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , puisque  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x}$ ,

$$\boxed{F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \ln(|x|) = \frac{x^2}{2} + x + \ln(x)}$$
 puisque  $x \in ]0; +\infty[$

3)  $f(x) = \frac{7}{x} + \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$ .  $f$  est continue sur  $]0; +\infty[$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, donc admet des

primitives sur  $]0; +\infty[$ , et pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $\boxed{F(x) = 7 \ln(|x|) + 5 \times 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} = 7 \ln(x) + 10\sqrt{x} - \frac{1}{x}}$ , car  $x \in ]0; +\infty[$

4)  $f(x) = \frac{3}{3x-4}$ .  $f$  est continue sur  $\left] \frac{4}{3}; +\infty \right[$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne

s'annulant pas, donc admet des primitives sur  $\left] \frac{4}{3}; +\infty \right[$ , et puisque  $f(x) = \frac{3}{3x-4} = \frac{u'(x)}{u(x)}$  où

$$u(x) = 3x - 4 \Rightarrow u'(x) = 3, \quad \boxed{F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|3x - 4|) = \ln(3x - 4)}$$
 car  $x \in \left] \frac{4}{3}; +\infty \right[$

5)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ .  $f$  est continue sur  $] -1; +\infty[$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne

s'annulant pas, donc admet des primitives sur  $] -1; +\infty[$ , et puisque  $f(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{u'(x)}{u(x)}$  où  $u(x) = x+1 \Rightarrow u'(x) = 1$ ,

$$\boxed{F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|x+1|) = \ln(x+1)}$$
 car  $x \in ] -1; +\infty[$

6) Si  $x \in ] -\infty; -1[$ ,  $\boxed{F(x) = \ln(|x+1|) = \ln(-(x+1)) = \ln(-x-1)}$

7)  $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$ .  $f$  est continue sur  $]2; +\infty[$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne

s'annulant pas, donc admet des primitives sur  $]2; +\infty[$ , et puisque  $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4} = \frac{u'(x)}{u(x)}$

où  $u(x) = x^2 - 4 \Rightarrow u'(x) = 2x$ ,  $F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|x^2 - 4|) = \ln(x^2 - 4)$  car  $x \in ]2; +\infty[$

8)  $f(x) = \frac{1}{3x-5}$  sur  $]2; +\infty[$ .  $f$  est continue sur  $]2; +\infty[$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur  $]2; +\infty[$ , et pour tout  $x \in ]2; +\infty[$ , puisque

$f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{3x-5} = \frac{1}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ , où  $u(x) = 3x-5 \Rightarrow u'(x) = 3$ ,  $F(x) = \frac{1}{3} \ln(|3x-5|) = \frac{1}{3} \ln(3x-5)$  car  $x \in ]2; +\infty[$

9)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$  sur  $\mathbb{R}$ .  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, (le discriminant du trinôme  $x^2 + 2x + 2$  est strictement négatif) donc admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout

$x \in \mathbb{R}$ , puisque  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ , où  $u(x) = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow u'(x) = 2x + 2$ ,

$F(x) = \frac{1}{2} \ln(|u(x)|) = \frac{1}{2} \ln(|x^2 + 2x + 2|) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2)$ , puisque  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + 2x + 2 > 0$

10)  $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$  sur  $] -1; 1[$ .  $f$  est continue sur  $] -1; 1[$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur  $] -1; 1[$ , et pour tout  $x \in ] -1; 1[$ , puisque

$f(x) = \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{u(x)}$ , où  $u(x) = x^2 - 1 \Rightarrow u'(x) = 2x$ ,  $F(x) = \frac{1}{2} \ln(|u(x)|) = \frac{1}{2} \ln(|x^2 - 1|) = \frac{1}{2} \ln(1 - x^2)$

puisque  $x \in ] -1; 1[ \Rightarrow 1 - x^2 < 0$

### Exercice n°12

1) Pour tout  $x \in [4; +\infty[$ ,  $ax + b + \frac{c}{x-2} = \frac{(ax+b)(x-2) + c}{x-2} = \frac{ax^2 + (b-2a)x - 2b + c}{x-2}$

Ainsi  $ax + b + \frac{c}{x-2} = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b-2a=-3 \\ -2b+c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3+4=1 \\ c=-4+2=-2 \end{cases}$ . Pour tout  $x \in [4; +\infty[$ ,  $f(x) = 2x + 1 + \frac{-2}{x-2}$

2)  $f$  est définie et continue sur  $[4; +\infty[$  en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur  $[4; +\infty[$ . A partir de l'écriture  $f(x) = 2x + 1 + \frac{-2}{x-2}$ , on déduit

l'expression d'une primitive  $F$  de  $f$  sur  $[4; +\infty[$  :  $F(x) = x^2 + x - 2 \ln(|x-2|) = x^2 + x - 2 \ln(x-2)$  car  $x \in [4; +\infty[ \Rightarrow x-2 > 0$

### Exercice n°13

1)  $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ .  $f$  est définie et continue sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$ , et pour tout  $x \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ , puisque  $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ , où

$u(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$ ,  $F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|\sin x|) = \ln(\sin x)$ , puisque  $x \in ]0; \frac{\pi}{2}[ \Rightarrow \sin x > 0$ .

2)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .  $f$  est définie et continue sur  $]1; +\infty[$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur  $]1; +\infty[$ , et pour tout  $x \in ]1; +\infty[$ , puisque

$$f(x) = \frac{1}{x} \times \ln x = u'(x) \times u(x), \text{ ou } u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}, \boxed{F(x) = \frac{(u(x))^2}{2} = \frac{(\ln(x))^2}{2}}$$

3)  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ .  $f$  définie est continue sur  $]1; +\infty[$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur  $]1; +\infty[$ , et pour tout  $x \in ]1; +\infty[$ , puisque  $f(x) = \frac{1/x}{\ln x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ , ou

$$u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}, \boxed{F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|\ln(x)|) = \ln(\ln(x))} \text{ car } x \in ]1; +\infty[ \Rightarrow \ln x > 0$$

4)  $f(x) = \tan x$ .  $f$  définie est continue sur  $\left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur  $\left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$ , et pour tout  $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$ , puisque  $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-u'(x)}{u(x)}$ , ou

$$u(x) = \cos x \Rightarrow u'(x) = -\sin x, \boxed{F(x) = -\ln(|u(x)|) = -\ln(|\cos x|) = -\ln(-\cos x)}, \text{ puisque } x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[ \Rightarrow \cos x < 0.$$

#### Exercice n°14

1)  $f(x) = \frac{1}{4}e^x$ .  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives

sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $\boxed{F(x) = \frac{1}{4}e^x}$ .

2)  $f(x) = e^{-x}$ .  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ , et puisque pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -(-e^{-x}) = -u'(x)e^{u(x)}$  ou  $u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = -1$ ,  $\boxed{F(x) = e^{u(x)} = e^{-x}}$ .

3)  $f(x) = e^{2x+3}$ .  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ , et puisque pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{2} \times 2e^{2x+3} = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$  ou  $u(x) = 2x+3 \Rightarrow u'(x) = 2$ ,

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}e^{u(x)} = \frac{1}{2}e^{2x+3}}$$

4)  $f(x) = xe^{x^2}$ .  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ , et puisque pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2} = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$  ou  $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$ ,

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}e^{u(x)} = e^{x^2}}$$

5)  $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ .  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas (car  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x+1 > 0$  donc  $\neq 0$ ) donc admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ , et puisque pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ ou } u(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = e^x, \boxed{F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|e^x+1|) = \ln(e^x+1)} \text{ car } x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x+1 > 0$$

### Exercice n°15

La fonction  $F$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , par  $F(x) = (ax + b)e^x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de fonction qui le sont, et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$

$F$  sera une primitive de  $f$  si et seulement si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 2 \end{cases}$

Une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est donc  $\boxed{F(x) = (x+1)e^x}$

### Exercice n°16

1) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{3}{e^{-x} + 1} = \frac{3 \times e^x}{(e^{-x} + 1) \times e^x} = \frac{3e^x}{e^{-x} \times e^x + 1 \times e^x} = \frac{3e^x}{1 + e^x}$

2) .  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas (car  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 + e^x > 0$  donc  $\neq 0$ ) donc admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ , et en utilisant l'écriture  $f(x) = \frac{3e^x}{e^x + 1} = 3 \frac{u'(x)}{u(x)}$  ou

$u(x) = e^x + 1$ , on obtient  $\boxed{F(x) = 3 \ln(|u(x)|) + k = 3 \ln(|e^x + 1|) + k = 3 \ln(e^x + 1) + k}$  car  $e^x + 1 > 0$  sur  $\mathbb{R}$