

TD : Le PRODUIT VECTORIEL

Exercice1: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\|=1 \text{ et } \|\vec{v}\|=3 \text{ et } \left(\vec{u};\vec{v}\right)=\frac{\pi}{3}$$

Calculer : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

Exercice2: dans l'espace muni d'un repère orthonormé directe $(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ on considère les

vecteurs : $\vec{u}(1;1;1)$ et $\vec{v}(2;1;2)$

Calculer : $\vec{u} \wedge \vec{v}$

Exercice3: $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$

Calculer : $\vec{u} \wedge \vec{v}$

Exercice4: dans l'espace muni d'un repère orthonormé directe $(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ on considère les

points $A(0;1;2)$ et $B(1;1;0)$ et $C(1;0;1)$

1) Déterminer les coordonnées du vecteur

$\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ et vérifier que les points

A et B et C sont non alignés

2) Calculer la surface du triangle ABC

3) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

Exercice5 L'espace est muni d'un repère orthonormé.

Quelle est l'intersection des plans d'équations respectives

$(P) x - y + 2z + 1 = 0$ et $(P') 2x + y - z + 2 = 0$

Exercice6 : L'espace est muni d'un repère orthonormé. Calculer la distance du point

$M(-1;0;1)$ à la droite (D) dont une

représentation paramétrique est : $(D):$

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Exercice7 soit ABCDEFGH un cube dans

L'espace orienté muni d'un repère orthonormé

directe $(A; \vec{AB}; \vec{AC}; \vec{AE})$

Soit I milieu du segment $[EF]$ et K centre de gravité du carré ADHE

1)a) Montrer que $\vec{BK} = \vec{IG} \wedge \vec{IA}$

b) En déduire la surface du triangle IGA

2) on suppose que ABCD est un quadrilatère convexe de diagonales qui se coupent en T et

soit Ω un point tel que : $\vec{D\Omega} = \vec{BT}$

2)a) comparer les distances : BD et ΩT et comparer la surface des triangles ABD et $A\Omega T$

2)b) Montrer que $\vec{AC} \wedge \vec{A\Omega} = \vec{AC} \wedge \vec{BD}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien



Le PRODUIT VECTORIEL

Exercice1: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\|=1 \text{ et } \|\vec{v}\|=3 \text{ et } \left(\vec{u};\vec{v}\right)=\frac{\pi}{3}$$

Calculer : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

Solution :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta = 1 \cdot 3 \sin \frac{\pi}{3} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Exercice2: dans l'espace muni d'un repère orthonormé directe $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ on considère les vecteurs : $\vec{u}(1;1;1)$ et $\vec{v}(2;1;2)$

Calculer : $\vec{u} \wedge \vec{v}$

Solution :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - 0\vec{j} - \vec{k} = \vec{i} - \vec{k}$$

Exercice3: $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$

Calculer : $\vec{u} \wedge \vec{v}$

Solution :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{j} - 8\vec{k}$$

Exercice4: dans l'espace muni d'un repère orthonormé directe $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ on considère les points $A(0;1;2)$ et $B(1;1;0)$ et $C(1;0;1)$

1) Déterminer les coordonnées du vecteur

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et vérifier que les points

A et B et C sont non alignés

2) Calculer la surface du triangle ABC

3) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

Solution :1) $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

$\overrightarrow{AB}(1;0;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(1;-1;-1)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ Donc les points A et B et C sont non alignés

2) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

Donc : $S_{ABC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

3) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$ un vecteur normal du plan ABC

Donc une équation cartésienne du plan ABC est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-2; -1; -1) \text{ donc } a = -2 \text{ et } b = -1 \text{ et } c = -1$$

$$\text{Donc : } -2x - 1y - 1z + d = 0 \text{ (ABC)}$$

$$\text{Et on a : } A(0;1;2) \in (P) \text{ donc : } 0 - 1 - 2 + d = 0$$

$$\text{donc } d = 3$$

$$\text{Donc (ABC) : } -2x - 1y - 1z + 3 = 0$$

$$\text{Donc (ABC) : } 2x + y + z - 3 = 0$$

Exercice5 L'espace est muni d'un repère orthonormé.

Quelle est l'intersection des plans d'équations respectives

$$(P) \ x - y + 2z + 1 = 0 \text{ et } (P') \ 2x + y - z + 2 = 0$$

Solution : $\vec{n}(1; -1; 2)$ et $\vec{n}'(2; 1; -1)$ deux vecteurs normaux respectivement de (P) et $(P)'$

$$\text{On a : } \vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n}' = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\text{Donc : } \vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n}' = -\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k} \neq \vec{0}$$

les plans (P) et $(P)'$ sont sécants suivant une droite (D)

et $\vec{u}(-1; 5; 3)$ est un vecteur directeur de (D)

et la droite (D) passe par $A(-1; 5; 3)$ (il suffit de donner par exemple $z = 0$ et résoudre le système et calculer x et y)

Donc : une représentation paramétrique de

$$(D) \text{ est } (D): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Exercice6 : L'espace est muni d'un repère orthonormé. Calculer la distance du point $M(-1;0;1)$ à la droite (D) dont une représentation paramétrique est (D) :

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Solution : la droite (D) passe par : $A(1;-1;0)$
 et $\vec{u}(2;-1;2)$ est un vecteur directeur de (D)
 et $\overrightarrow{AM}(-2;1;1)$

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$$

$$\text{Donc : } \|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5} \text{ et } \|\vec{u}\| = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$$\text{Donc : } d(M;(D)) = \frac{3\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$$

Exercice7 soit ABCDEFGH un cube dans L'espace orienté muni d'un repère orthonormé directe $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE})$

Soit I milieu du segment $[EF]$ et K centre de gravité du carré ADHE

1)a) Montrer que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$

b) En déduire la surface du triangle IGA

2) on suppose que ABCD est un quadrilatère convexe de diagonales qui se coupent en T et soit Ω un point tel que : $\overrightarrow{D\Omega} = \overrightarrow{BT}$

2)a) comparer les distances : BD et ΩT et comparer la surface des triangles ABD et $A\Omega T$

2)b) Montrer que $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

