LES SUITES NUMERIQUES

I) GENERALITES

1) Définitions et notations.

Définition : On appelle suite numérique toute application de $\mathbb{N}$ (ou une partie I de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$

$u : I \to \mathbb{R}$

$n \mapsto u(n) = u_n$

Notation : Si u est une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ l'image de l'entier n par u se note u_n et s'appelle le terme de rang n de la suite

L'entier n s'appelle l'indice du terme u_n

La suite numérique u se note : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ou $(u_n)_n$

2) Comment générer une suite

Une suite numérique peut être définie de deux manières différentes :

a) Suite définie par : une expression explicite

Dans laquelle le terme u_n de la suite $(u_n)_n$ est définie en fonction de n **Exemple :** soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$u_n = 2n+3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Une suite définie par : une expression récurrente

Ces suites s'appellent des suites récurrentes, elles sont définies par le (ou les) premier (s) terme (s) et une relation entre deux ou plusieurs termes consécutifs.

Exemple1 : Suites récurrente du premier ordre

soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$u_0 = 2; u_{n+1} = 5u_n - 7 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) Suites majorées, suites minorées, suites bornées.

Définition : Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique. ($\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$)

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est majorée s'il existe un réel M tel que : $\forall n \in I \quad u_n \le M$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est minorée s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in I \quad m \le u_n$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée si elle est majorée et minorée.

Propriété : Une suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel positif M tel que :

$\forall n \in I \quad |u_n| \le M$

4) Monotonie d'une suite.

Définition : Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique. ($\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$)

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si :

$\forall n \in I \ \ \forall m \in I \ : m \le n \Rightarrow u_m \le u_n$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si : $\forall n \in I$ $\forall m \in I \ : m \le n \Rightarrow u_m \ge u_n$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante sur $\mathbb{I}$.

Théorème : Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique. ($\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$)

- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si et seulement si:
- $\forall n \in I \ u_{n+1} \ge u_n$
- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si et seulement si:

$\forall n \in I \quad u_{n+1} \le u_n$

II) SUITES ARITHMETIQUES ; SUITES GEOMETRIQUES

1) Suite arithmétique.

Définition : On appelle suite arithmétique toute suite $(u_n)_{n\in I}$ définie par son premier terme et par la relation récurrente : $\forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n + r$

Où r est un réel fixe. Le réel $\boldsymbol{r}$ s'appelle la raison de la suite $(u_n)_{n\in I}$.

1.2) propriété caractéristique d'une suite arithmétique

Trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$(u_n)_{n\ge p}$ est suite arithmétique si et seulement si

$2u_{n+1} = u_n + u_{n+2} \ \forall n \ge p$

1.3) Terme général d'une suite arithmétique.

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique de raison r et u_p l'un de ses termes on a : $\forall n \in I \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Remarque : Si u_0 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r alors : $u_n = u_0 + nr$

Si u_1 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r alors : $u_n = u_1 + (n-1)r$

1.4) La somme des termes successifs d'une suite arithmétique.

Soient $(u_n)_n$ une suite arithmétique et p un entier naturel

et $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n$

On a : $s_n = \frac{(n-p+1)}{2}(u_p + u_n)$

Avec : $n-p+1$ le nombre des termes de la somme

u_p : le premier terme de la somme

u_n : le dernier terme de la somme

Remarque : On note la somme :

$s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$ par :

$s_n = \sum_{k=p}^{k=n} u_k$

Si p=0 on a : $s_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$

Si p=1 on a : $s_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

2) Suite géométrique.

2.1) Définition : On appelle suite géométrique toute suite $(u_n)_n$ définie par son premier terme et par la relation récurrente : $u_{n+1} = qu_n \quad \forall n \in I$ où q est un réel fixe. Le réel q s'appelle **la raison** de la suite $(u_n)_n$.

Le premier terme et la raison d'une suite géométrique s'appellent aussi les éléments de la suite géométrique.

2.2) *Terme général d'une suite géométrique*

Si $(u_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison q et si p est un entier naturel alors : $u_n = q^{n-p}u_p \quad \forall n \in I$

Cas particuliers :

1) si p=0 alors: $u_n = q^n u_0$ 2) si p=1 alors : $u_n = q^{n-1}u_1$

2.3) *La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.*

Proposition : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q , et u_p l'un de ses termes.

Et $s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$

Si $q = 1$ alors : $s_n = (n-p+1)u_p$

Si $q \neq 1$ alors : $s_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

2.4) Propriété : a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique

si et seulement si $b^2 = a \times c$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien