

Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} et a un réel élément de I .

f est continue en a si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) : \text{C'est-à-dire :}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 \leq |x - a| < \alpha \Rightarrow$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Continuité à droite et à gauche

1) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r[$ où $r > 0$

On dit que la fonction f est continue à droite de a si elle admet une limite finie à droite en a

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) :$$

2) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a - r; a]$ où $r > 0$

On dit que la fonction f est continue à gauche de a si elle admet une limite finie à gauche en a

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

3) Une fonction est continue en un point a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de a

Donc : f est continue en $x_0 = 0$ ssi

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Continuité sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} .

f est continue sur I si et seulement si f est continue en chaque réel a de I .

Les fonctions continues sont les fonctions dont le graphe « se trace sans lever le crayon ».

Prolongement par continuité

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est

D_f ; a un réel tel que $a \notin D_f$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ (finie)

La fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } \dots x \neq a \\ f(a) = l \end{cases}$$

Est une fonction continue en a et s'appelle un prolongement par continuité de la fonction f en a

Exemples de fonctions continues

- les fonctions polynômes sont continues sur \mathbb{R} ;
- les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition •
- les fonctions exponentielles sont continues sur \mathbb{R} ;

- les fonctions logarithme népérien et logarithme décimal sont continues sur $]0, +\infty [$;
- les fonctions racines n -ème sont continues sur $[0, +\infty [$;
- les fonctions sinus et cosinus sont continues sur \mathbb{R} , la fonction tangente est continue sur tout intervalle ne contenant pas un nombre de la forme $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- la fonction valeur absolue est continue sur \mathbb{R} ;
- toutes les fonctions obtenues par opérations (somme, produit, quotient) ou composition à partir de ces fonctions de référence sont aussi continues sur leur domaine de définition.
- La fonction partie entière est une fonction définie sur \mathbb{R} et discontinue en certains réels (et donc non continue sur \mathbb{R}).

Opérations sur les fonctions continues

1) Si f et g sont deux fonctions continues en a alors

$$\text{: a) } f + g \quad \text{b) } f \times g \quad \text{c) } |f|$$

Sont des fonctions continues en a

2) Si f et g sont deux fonctions continues en a

et $g(a) \neq 0$ alors : a) $\frac{1}{g}$ b) $\frac{f}{g}$ sont des fonctions

continues en a .

3) Si f une fonction continue en a et $f(a) \geq 0$ alors :

\sqrt{f} est continue en a

Image d'un intervalle.

1) L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

2) si f continue et strictement croissante sur

L'intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$

$$f([a; b]) = [f(a); f(b)] \quad \text{et} \quad f([a; b[) = \left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$$

$$f(]a; b]) = \left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right] \quad \text{et} \quad f(]a; b]) = \left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right]$$

3) f continue et strictement décroissante sur

L'intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$

$$f([a; b]) = [f(b); f(a)] \quad \text{et} \quad f([a; b[) = \left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right[$$

$$f(]a; b]) = \left] f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right] \quad \text{et} \quad f(]a; b]) = \left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right]$$

Théorème des valeurs intermédiaires

1) Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux réels de I .

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

2) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[a, b]$. Ces résultats se généralisent à des intervalles du type $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$, $[a, +\infty[$, $] - \infty, b]$, ... en remplaçant $f(a)$ ou $f(b)$ par la limite de f en la borne manquante.

3) Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$. Si $f(a)f(b) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique dans $[a, b]$.

FONCTIONS RECIPROQUES.

1) Soit f une fonction définie continue et strictement monotone sur un intervalle I , On a f admet une fonction réciproque f^{-1} définie de $J = f(I)$ vers I .

2) Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors f^{-1} à la même monotonie sur J que celle de f sur I .

3) Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors $(C_{f^{-1}})$ et (C_f) sont symétriques par rapport à $(\Delta) y = x$

La fonction racine n - éme

1) Soit n un élément de \mathbb{N}^* ; la fonction $f : x \rightarrow x^n$ est une fonction continue strictement croissante sur \mathbb{R}^+ elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} de $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ vers \mathbb{R}^+ et La fonction réciproque f^{-1} s'appelle la fonction racine n - éme et se note $\sqrt[n]{x}$

Propriétés de la racine n - éme

- 1) La fonction $\sqrt[n]{x}$ est définie sur \mathbb{R}^+
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}^+ \sqrt[n]{x} \geq 0$
- 3) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$
- 4) La fonction $\sqrt[n]{x}$ est continue sur \mathbb{R}^+ strictement croissante.
- 5) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- 6) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall a \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} \geq a \Leftrightarrow x \geq a^n$
- 7) $(\forall a \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a^n$
- 8) $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$
- 9) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall p \in \mathbb{N}) (\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$ 10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- 11) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$
- 12) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l$ et $l \geq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$

$$13) \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}} \text{ et } x^r = x^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{x})^p \quad q \in \mathbb{N}^* \text{ et } p \in \mathbb{Z}$$

L'expression conjuguai et ses applications

On sait que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

et $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ Il en résulte :

$$a-b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} \text{ et } a+b = \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}$$

Par suite $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2}$$

$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})$

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \frac{x + y}{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2}$$

On sait que $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

Par suite $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})$

$$\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}}$$

La fonction arctangente :

1) La restriction de la fonction \tan sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ est une bijection de $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ Vers \mathbb{R} .

Sa bijection réciproque s'appelle la fonction arc tangente, notée : **artan** elle est définie de \mathbb{R} vers

$$\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[: \begin{cases} \text{artan } x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\end{cases}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{artan } x = \frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{artan } x = -\frac{\pi}{2}$$

$$3) (\forall x \in \mathbb{R})(\tan(\text{artan } x) = x)$$

$$\text{et } \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\text{artan}(\tan x) = x$$

4) La fonction **artan** est continue et impaire strictement croissante sur \mathbb{R}

$$5) \text{artan } x = \text{artan } y \Leftrightarrow x = y \quad \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{artan } x < \text{artan } y \Leftrightarrow x < y \quad \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{artan } x}{x} = 1$$

$$7) (\forall x \in \mathbb{R}^+) (\text{artan } x + \text{artan } (1/x) = \pi/2)$$

$$\text{et } (\forall x \in \mathbb{R}^-) (\text{artan } x + \text{artan } (1/x) = -\pi/2)$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

