VECTEURS DE L'ESPACE

I) Vecteur de l'espace

1)si A, B sont deux points dans l'espace $\mathscr{E}$
Si A et B sont distinctes alors ils forment un vecteur noté : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
Si A et B sont confondues alors : $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$ (vecteur nul)

2)Remarques :

a) Si O un point dans l'espace $\mathscr{E}$ alors pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace il existe un point unique M dans l'espace $\mathscr{E}$ tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

b) L'ensemble des vecteurs de l'espace se note V_3

c) Un vecteur non nul $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :
Sa direction : c'est la direction de la droite (AB)
Son sens : de A a B
Sa norme : $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$

d) Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens, la même norme.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ ssi ABNM est un parallélogramme

e) Deux vecteurs peuvent avoir la même direction de tels vecteurs sont colinéaires

II) LES OPERATIONS DANS V_3 .

1) L'addition.

Définition : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de V_3 ;
Soient les points O : A ; B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OC}$
la somme des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OD}$ tel que : OBDC est un parallélogramme
$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$

Propriété : L'addition dans V_3 a les propriétés suivantes
$\forall \vec{u} \in V_3$ et $\forall \vec{v} \in V_3$ $\forall \vec{w} \in V_3$
1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ 2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$
3) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ 4) Tout vecteur $\vec{u}$ de V_3 admet un opposé noté $-\vec{u}$: $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

donc : (V_3 , +) est un groupe commutatif.
Et et on a donc : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

2) Produit d'un vecteur par un réel.

Définition : $\forall \vec{u} \in V_3$ et $\forall \vec{v} \in V_3$ et $k \in \mathbb{R}^*$
Si $\vec{u}$ est non nul on pose : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
sur la droite (AB) il existe un seul point C tel que $\overrightarrow{AC} = k\vec{u}$

Le vecteur $\vec{v} = k\overrightarrow{AB} = k\vec{u}$ s'appelle le produit du réel k et du vecteur $\vec{u}$
on pose pour tout k dans $\mathbb{R}$: $k\vec{0} = \vec{0}$ et $0\vec{u} = \vec{0}$
on a : $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$

Propriété : $\forall \vec{u} \in V_3$ et $\forall \vec{v} \in V_3$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\forall \beta \in \mathbb{R}$
1) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ 2) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
3) $1\vec{u} = \vec{u}$ 4) $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$

on dit que : (V_3 ,+,.) **est un espace vectoriel réel.**

Remarque :
$\forall \vec{u} \in V_3$ et $\forall \vec{v} \in V_3$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$; $\forall \beta \in \mathbb{R}$
1) $\alpha(\vec{u} - \vec{v}) = \alpha\vec{u} - \alpha\vec{v}$ 2) $(\alpha - \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} - \beta\vec{u}$
3) $\alpha(-\beta\vec{u}) = (-\alpha)(\beta\vec{u}) = -\alpha\beta\vec{u}$

III) VECTEURS COLINEAIRES.

1) Vecteur colinéaires

Définition : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que :
$\vec{v} = k.\vec{u}$

Propriété : Si on a : $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

2) Droite vectorielle

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, l'ensemble des vecteurs colinéaires avec le vecteur $\vec{u}$ s'appelle : la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}$ et se note $\Delta_{\vec{u}}$

$\Delta_{\vec{u}} = \{\vec{v} \in V_3 / \exists k \in \mathbb{R} / \vec{v} = k\vec{u}\}$

$\Delta_{\vec{u}} = \Delta_{\vec{v}} \Leftrightarrow \vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires

Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $\Delta_{\vec{u}} \cap \Delta_{\vec{v}} = \{\vec{0}\}$

3) Détermination vectorielle d'une droite

Définition : Soient $\vec{u}$ un vecteur non nulle et A un point de l'espace affine $\mathscr{E}$. L'ensemble des points M dans l'espace $\mathscr{E}$ qui vérifient $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ où k est un réel s'appelle la droite qui passe par $\boldsymbol{A}$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ **.** On la note par $D(A;\vec{u})$: $D(A;\vec{u}) = \{M \in \varepsilon / \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = k\vec{u}\}$

Remarque :

- Le couple $(A, \vec{u})$ détermine un repère sur la droite $D\left(A;\vec{u}\right)$
- Tout vecteur non nul et colinéaire avec $\vec{u}$ est aussi vecteur Directeur de la droite $D\left(A;\vec{u}\right)$

IV) VECTEURS COPLANAIRES.

1) vecteurs coplanaires.

Définition : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et ***A*** un point l'espace

on pose $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{AD}=\vec{w}$

On dit que : les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi les points A, B ; C et D sont coplanaires

Propriété : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs dans l'espaces vectoriel

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'ils existent deux réels x et y

tels que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

Remarque : si $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires alors les vecteurssont coplanaires $\vec{w}$ et $\vec{v}$ et $\vec{u}$

2) Plan vectoriel

Définition : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires ; l'ensemble des vecteurs $\vec{w}$ dans V_3 qui s'écrivent de la forme : $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

où x et y sont des réels s'appelle le plan vectoriel engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$

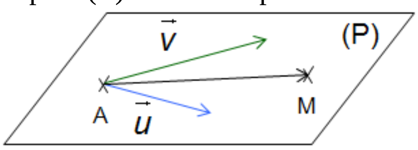
3) Détermination vectoriel d'un plan.

Définition : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et A un point de l'espace $\mathscr{E}$

l'ensemble des point M dans l'espace qui vérifient $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$ est le plan qui passe par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, on le note par : $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$

$$P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)=\left\{M\in\varepsilon / \exists x\in\mathbb{R} : \exists y\in\mathbb{R} / \overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}\right\}$$

Le triplet $R\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ s'appelle un repère du plan (P) et le couple (x, y) s'appelle les coordonnées du point M dans le plan (P) muni du repère R



V) PARALLELISME DANS L'ESPACE

1) Parallélisme de deux droites

Définition : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs et et A et B deux points de l'espace

1) $D\left(A;\vec{u}\right) \parallel D\left(B;\vec{v}\right) \Leftrightarrow \vec{u}$, $\vec{v}$ sont colinéaires

2) A et B et C et D des points tels que : $A\neq B$ et $C\neq D$: $\left(AB\right) \parallel \left(CD\right) \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R};\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$

2) Parallélisme d'une droite et d'un plan.

Propriété : La droite $D\left(A;\vec{u}\right)$ et le plan $P\left(B;\vec{v};\vec{w}\right)$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

$$D\left(A;\vec{u}\right) \parallel P\left(B;\vec{v};\vec{w}\right) \Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{R} : \exists y\in\mathbb{R} / \vec{u}=x\vec{v}+y\vec{w}$$

3) Parallélisme de deux plans

Propriété : Deux plans $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ et $Q\left(B;\vec{u'};\vec{v'}\right)$ sont parallèles si et seulement si

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u'}$ sont coplanaires et $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ sont coplanaires aussi

Remarque : Une seule condition n'est pas suffisante

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien