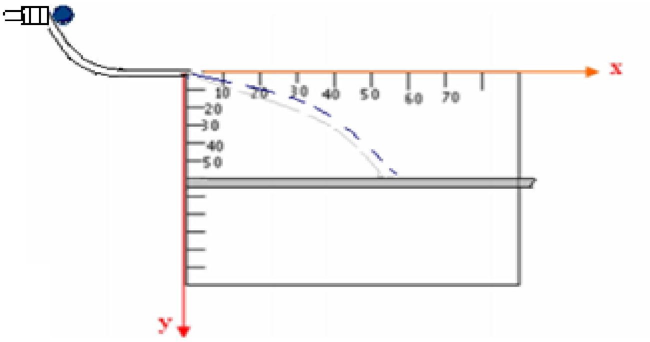
Les mouvements plans

(Uniquement pour sc math et sc physique)

I-Le mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur:

1)Trajectoire du projectile:

On utilise le dispositif suivant d'étude du mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur :

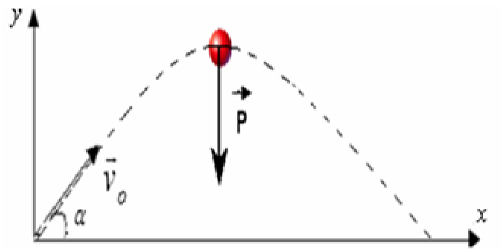


Au début la bille est maintenue par électroaimant puis lâchée du haut d’un rail ,elle roule le long du rail et elle le quitte avec une vitesse initiale horizontale puis elle tombe sur une plaque horizontale.
En faisant varier la position de la plaque et en indiquant chaque fois sa position de chute de la bille, on obtient la trajetoire de son mouvement: c'est une trajetoire parabolique.

2) Etude du mouvement du projectile :

Un projectile de masse m est lancé d'un point O à l'instant t=0 avec une vitesse $\vec{v}_o$ qui fait un angle α avec l'horizontale.

On considère un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ confondu avec le plan du mouvement du projectile et qu'on suppose galiléen.



Les conditions initiales : à t=o ,x_o=0 et y_o=0

Les coordonnées du vecteur vitesse initiale sont : $\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$

- **<u>Le système étudié</u>** :{le projectile}
- **<u>Bilan des forces:</u>** le projectile est soumis uniquement à l'action de son poids : $\vec{P}$
  (Le projectile a une grande densité ,donc la poussée d'Archimède et les forces de frottement fluides sont négligeable)
- **<u>Représentation des forces</u>**: voir schéma précédent.
- **<u>En appliquant la 2ème loi de Newton</u>** : $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}_G \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = m.\vec{a}_G$ **(1)**

<u>-Par projection</u> de la relation (1) dans le repère (O,x,y) :

$$\begin{cases} P_x = m.a_x \\ P_y = m.a_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = m.a_x \\ -P = m.a_y \end{cases} \text{ donc: } \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_y}{dt} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = C \\ v_y = -g.t + C' \end{cases}$$

On détermine les constantes C et C' d'après les conditions initiales : à t=0 : $v_{oy} = v_o.\sin\alpha$ et : $v_{ox} = v_o.\cos\alpha$. : donc:

$$\begin{cases} v_x = v_o.\cos\alpha \\ v_y = -g.t + v_o.\sin\alpha \end{cases} \text{ d'où : } \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_o.\cos\alpha \\ \dfrac{dy}{dt} = -g.t + v_o.\sin\alpha \end{cases} \text{ donc : } \begin{cases} x = (v_o.\cos\alpha).t + K \\ y = -\dfrac{1}{2}g.t^2 + (v_o.\sin\alpha).t + K' \end{cases}$$

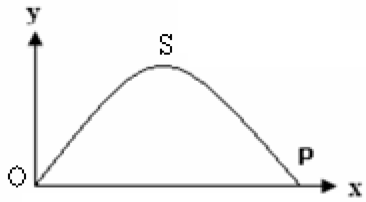
On détermine les constantes K et K' d'après les conditions initiales : à t=0 , x_o=0 et y_o=0 donc :K=0 et K'=0.

Et on obtient les **<u>équations horaires du mouvement</u>** du projectile $\begin{cases} x = (v_o.\cos\alpha).t \\ y = -\dfrac{1}{2}g.t^2 + (v_o.\sin\alpha).t' \end{cases}$

<u>On obtient l'équation de la trajectoire en éliminant t entre x et y.</u>

On a $\begin{cases} x = (v_o.\cos\alpha).t \\ y = -\frac{1}{2}g.t^2 + (v_o.\sin\alpha).t' \end{cases}$ donc : $t = \frac{x}{v_o.\cos\alpha}$ en remplaçant dans y : $y = -\frac{g.}{2.v_o{}^2.\cos^2\alpha}.x^2 + x.\tan\alpha$

<u>Le sommet S de la trajectoire</u> : c'est le plus haut point atteint par le projectile au cours de son mouvement.



Au sommet de la trajectoire on a $v_y = 0$ $\Rightarrow -g.t + v_o.\sin\alpha = 0$ d'où : $t = \frac{v_o.\sin\alpha}{g}$:et en remplaçant dans x et y on obtient les coordonnées du sommet S de la trajectoire du projectile.

$$y_S = \frac{v_o^2.\sin^2\alpha}{2g} \quad \text{et} \quad x_S = \frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

avec: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$

<u>La portée</u> : c'est la distance OP qui sépare le point de lancement du projectile et le point de sa tombée sur ox.

Au point P on a : $y_P = 0$ $\Rightarrow$ $-\frac{g}{2v_o{}^2\cos^2\alpha}.x^2 + x.tg\alpha = 0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x_P = 0 & \text{C'est le point de départ du projectile.} \\ \text{ou : } x_P = \frac{v_o^2.\sin 2\alpha}{g} \end{cases}$

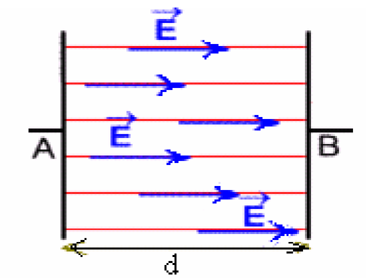
donc : $OP = \frac{v_o^2.\sin 2\alpha}{g}$

<u>Remarque:</u> La plus grande portée correspond à $\sin 2\alpha = 1$ $\Rightarrow$ $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$

II-Le mouvement d'une particule chargée dans un champ éléctrique uniforme: (uniquement pour science mathématique)

1)Le champ éléctrique uniforme:

Un champ électrique est dit uniforme s'il est constant en direction, en sens et en valeur : les lignes de champs sont alors toutes parallèles.



Entre deux plaques métalliques planes et parallèles, soumises à une différence de potentielle: $U_{AB}=U_A-U_B$, il existe un champ électrique uniforme.

Les lignes de champ entre les plaques sont parallèles entre elles et perpendiculaires aux plans des plaques.

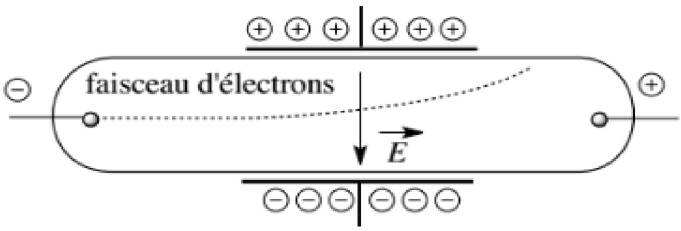
Le vecteur champ électrique $\vec{E}$ est orienté dans sens des potentielles décroissants(il est dirigé de la plaque ayant le plus grand potentiel vers celle ayant le plus petit potentiel).

$U_{AB} > 0 \Rightarrow V_A - V_B > 0 \Rightarrow V_A > V_B$ donc : $\vec{E}$ est dirigé de la plaque A vers la plaque B.

2) Déviation d'une particule chargée dans un champ éléctrique uniforme:

a)**<u>Expérience</u>**:

On utilise un tube de crookes qui contient un canon d'électrons qui permet d'obtenir un faisceau d'électrons ayant la même vitesse et à l'intérieur duquel il y'a un champ électrique uniforme.



Les électrons entrent dans le champ électrique avec une vitesse $\vec{v}_o$ perpendiculaire à $\vec{E}$.

On constate expérimentalement que la trajectoire du faisceau d'électrons est parabolique.

3) Etude du mouvement d'une particule chagées dans un champ électrique uniforme :

a)<u>Les équations horaires du mouvement:</u>

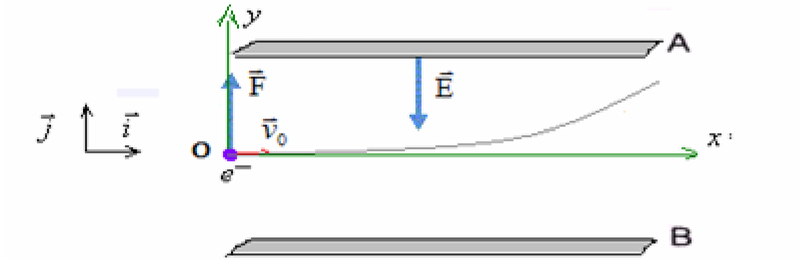
- **<u>Le système étudié</u>** :{l'électron}

Le poids de l'électron est négligeable devant la force électrique (car la masse de l'électron est $m=9{,}11.10^{-31}$kg très petite)

- **Bilan des forces:** En négligeant le poids, l'électron n'est soumis dans le champ électrique qu'à l'action de la force électrique:

$\vec{F} = q.\vec{E}$ avec: $q = -e$ donc : $q<0$, $\vec{F}$ et $\vec{E}$ ont des sens contraires. ,

- **Représentation des forces**:



On considère un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ confondu avec le plan du mouvement de la particule et qu'on suppose galiléen.

On a : $\vec{E} = -E.\vec{j}$ Les coordonnées du vecteur champ électrique sont : $\vec{E}\left|\begin{array}{l} E_x = 0 \\ E_y = -E \end{array}\right.$

Les conditions initiales: Les coordonnées du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_o \begin{cases} v_x = v_o \\ v_y = 0 \end{cases}$ et on a à t=0 , $x_o=0$ et $y_o=0$

- **En appliquant la 2ème loi de Newton** : $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}_G \Rightarrow \vec{F} = m.\vec{a}_G$ **donc:** $q.\vec{E} = m.\vec{a}_G$ (1)

-Par projection de la relation (1) sur l'axe (O,x,y)

$$\begin{cases} 0 = m.a_x \\ -q.E = m.a_y \end{cases} \text{ avec : q=-e } \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \dfrac{e.E}{m} \end{cases} \text{ d'où : } \begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{e.E}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = C^{te} = v_o \\ v_y = \dfrac{e.E}{m}.t \end{cases}$$

Selon l'axe ox le mouvement est rectiligne uniforme
Selon l'axe oy le mouvement est rectiligne uniformément varié (accéléré)
Equations horaires du mouvement selon l'axe ox : $\mathbf{x=v_o.t}$ car $x_o=0$

Equations horaires du mouvement selon l'axe oy : $y = \dfrac{1}{2}.\dfrac{e.E}{m}.t^2$ car : $v_{oy}=0$ et $y_o=0$

b)Equation de la trajectoire:

On obtient l'équation de la trajectoire en éliminant t entre x et y.

On a : $\begin{cases} x = v_o.t \\ y = \dfrac{1}{2}.\dfrac{e.E}{m}.t^2 \end{cases}$ donc : $t = \dfrac{x}{v_o}$, en remplaçant dans y on obtient : $y = \dfrac{1}{2}.\dfrac{e.E}{m}.\dfrac{x^2}{v_o^{\,2}}$

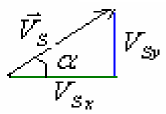
c)Les coordonnées du point de sortie de l'électron du champ électrique:

S est le point de sortie de l'électron $x_S = \ell$ en remplaçant dans y on a : $y_S = \dfrac{1}{2}.\dfrac{e.E}{m}.\dfrac{\ell^2}{v_o^{\,2}}$

d) Vitesse de l'électron lorsqu'il quitte le champ électrique:

On a : $x=v_o.t$ le temps mis par l'électron pour arriver au point S est : $t = \dfrac{\ell}{v_o}$ d'où $\vec{V}_S \begin{cases} V_{Sx} = v_o \\ V_{Sy} = \dfrac{eE}{m}.\dfrac{\ell}{v_o} \end{cases}$

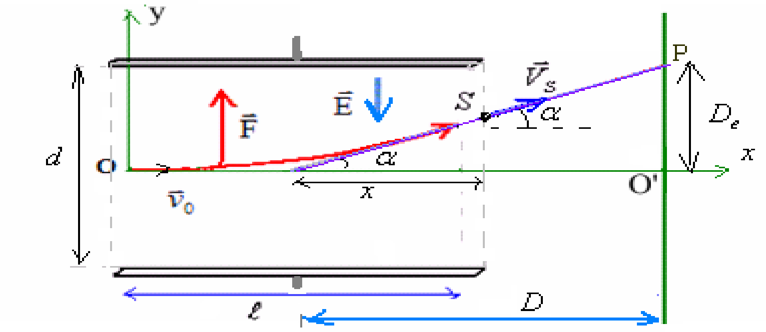
On a : $\vec{V}_S = \vec{V}_{Sx} + \vec{V}_{Sy}$



$tg\alpha = \dfrac{V_{Sy}}{V_{Sx}} = \dfrac{eE.\ell}{m.v_o^{\,2}}$

e) Déflexion électrique:

Après sa sortie du champ électrique l'électron a un mouvement rectiligne uniforme jusqu'à ce qu'il rencontre l'écran au point P.



Démontrons que $x = \dfrac{\ell}{2}$

On a: $tg\alpha = \dfrac{y_S}{x}$ avec : $tg\alpha = \dfrac{e.E}{m}\cdot\dfrac{\ell}{v_o^2}$ et avec : $y_S = \dfrac{1}{2}.\dfrac{e.E}{m}.\dfrac{\ell^2}{v_o^2}$ donc: $x = \dfrac{y_S}{tg\alpha} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{e.E}{m}.\dfrac{\ell^2}{v_o^2} \times \dfrac{m.v_o^2}{e.E.\ell} = \dfrac{\ell}{2}$

On appelle déflexion électrique la distance D_e entre le point d'impact O' de la particule avec l'écran en absence du champ électrique et le point d'impact P de la particule avec l'écran en présence du champ électrique.

on a : $tg\alpha = \dfrac{y_S}{x} = \dfrac{D_e}{D}$ avec: $D_e = \dfrac{y_S \times D}{x} = \dfrac{e.E}{2.m}.\dfrac{\ell^2 \times D}{v_o^2} \times \dfrac{2}{\ell} = .\dfrac{e.E}{m}.\dfrac{\ell \times D}{v_o^2}$ et on a : $E = \dfrac{U}{d}$ donc :

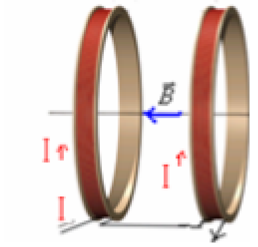
$D_e = \dfrac{.e.\ell.D}{m.d.v_o^2} \times U$: la déflexion électrique est proportionnelle à la tension entre les plaques elle est sous la forme : $D_e = k \times U$

III-Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme:

1)Le champ magnétique uniforme:

Un champ magnétique est dit uniforme s'il est constant en direction, en sens et en valeur .

Exemple : Le champ magnétique est uniforme entre les bobines d'Helmholtz parcourues par un courant électrique.



L'unité de l'intensité du champ magnétique est le tesla (T).

Remarque : si le vecteur $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan de la feuille et dirigée vers l'avant on le représente par : $\odot \vec{B}$

si le vecteur $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan de la feuille et dirigée vers l'arrière on le représente par : $\otimes \vec{B}$

2) Déviation d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme:

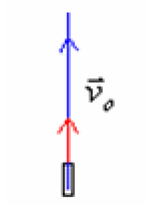
a) Expérience :

On utilise un tube de crookes (qui contient un canon d'électrons permetant d'obtenir un faisceau d'électrons ayant la même vitesse) à l'intérieur duquel il y'a un champ magnétique uniforme entre deux bobines d'Helmholtz parcourues par un courant électrique.

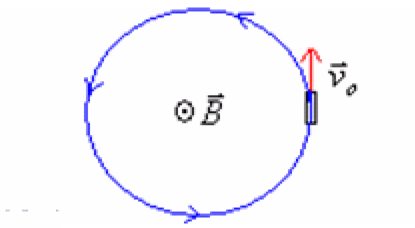
On constate expérimentalement que :

-Si la vitesse des électrons $\vec{v}_o$ est parallèle à $\vec{B}$, le faisceau d'électrons ne subit pas de déviation.

-Si la vitesse $\vec{v}_o$ des électrons est perpendiculaire à $\vec{B}$, le faisceau d'électrons dévie et sa trajectoire est devient circulaire.



Trajectoire du faisceau en présence du champ magnétique



Trajectoire du faisceau à l'absence du champ magnétique

b) Interprétation:

La déviation du faisceau d'électron est du à l'existence d'une force magnétique qui s'exerce sur toute particule chargée et en mouvement dans un champ magnétique uniforme qu'on appelle : **force magnétique** ou **force de Lorentz.**

c) La force magnétique (force de Lorentz)

3) La force magnétiquee :

Toute particule chargée de vitesse $\vec{v}$ est soumise dans un champ magnétique uniforme à une force magnétique appelée force de Lorentz donnée par la relation suivante:

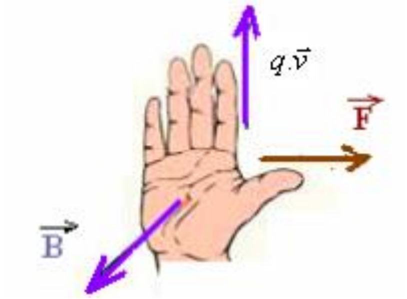
$\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$ le symbole: $\wedge$ signifie produit vectoriel.

<u>Caractéristiques de la force magnétique</u>:

- <u>La direction</u> : la force magnétique $\vec{F}$ est perpendiculaire au plan: $(\vec{B}, \vec{v})$.

-<u>Le sens</u> : il est donné par la règle de la main droite suivante:

En plaçant la main droite tendue de sorte les doigts soient dirigés dans le sens du produit $q.\vec{v}$ et la paume de la main soit dirigée dans le sens de $\vec{B}$, le pouce tendu indique le sens de la force magnétique .



<u>Remarque</u>: Si la charge q>0 le produit $q.\vec{v}$ a le même sens que le vecteur vitesse $\vec{v}$.
Si la charge q<0 le produit $q.\vec{v}$ a le sens contraire de celui du vecteur vitesse $\vec{v}$.

<u>Exemples</u> : compléter les figures suivantes:

$\vec{F}$ $\vec{v}$ $q<0$	$\vec{B}\odot$ $\vec{F}$ $q<0$	$\vec{B}\odot$ $\vec{v}$ $q<0$	$\vec{v}$ $\vec{B}\odot$ $q<0$	$\vec{v}$ $\vec{B}\odot$ $q>0$	Figure
$\vec{B}\odot$	$\vec{v}$	$\vec{F}$	$\vec{F}$	$\vec{F}$	réponse

- <u>L'intensité</u>: $F = |q|.v.B.\sin(\widehat{\vec{B},\vec{v}})$

4) Etude du mouvement d'une particule chagées dans un champ magnétiquee uniforme :

a) <u>Montrons que le mouvement de l'électron dans le champ magnétique est uniforme</u>:

L'électron dans le champ magnétique est soumis à l'action de la force magnétique $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$, cette force de Loreentz est toujours perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{v}$ donc le produit scalaire $\vec{F}.\vec{v} = 0$ par conséquence la puissance de la force magnétique est nulle : $P = \vec{F}.\vec{v} = 0$ donc son travail est nul : $W\vec{F} = 0$

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique : $\Delta Ec = W\vec{F} \Rightarrow \Delta Ec = 0$ donc : $Ec_f = Ec_i$

Donc sa vitesse v= C^{te} ., donc l'action du champ magnétique ne modifie pas l'énergie cinétique de la particule

b) <u>Montrons que le mouvement de l'électron dans le champ magnétique est plan</u>:

la vitesse de l'électron $v = C^{te} \Rightarrow$ son accélération tangentielle : $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$ donc l'accélération de l'électron est normale.

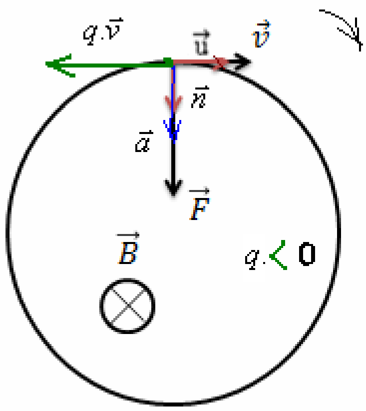
on a : $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow$ la force magnétique $\vec{F}$ qui perpendiculaire au plan $(\vec{B}, \vec{v})$ est elle aussi normale.

Donc le mouvement de l'électron est plan , il se fait dans un plan perpendiculaire au vecteur champ magnétique.

c) <u>Montrons que le mouvement de l'électron dans le champ magnétique est circulaire:</u>

Dans le repère de Frenet le vecteur accélération : $a = a_N.\vec{n} + a_t\vec{u}$

or : $v = C^{te} \quad \Rightarrow \quad a_t = \frac{dv}{dt} = 0$



En appliquant la deuxième loi de Newton : $\vec{F} = m.a_G \quad \Rightarrow q.\vec{v} \wedge \vec{B} = m.\vec{a}_G \quad (1)$

Dans le repère de Frenet : $\vec{a}_G \begin{vmatrix} a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \\ a_n = \frac{v^2}{R} \end{vmatrix}$ Donc : a=a_n l'accélération est normale.

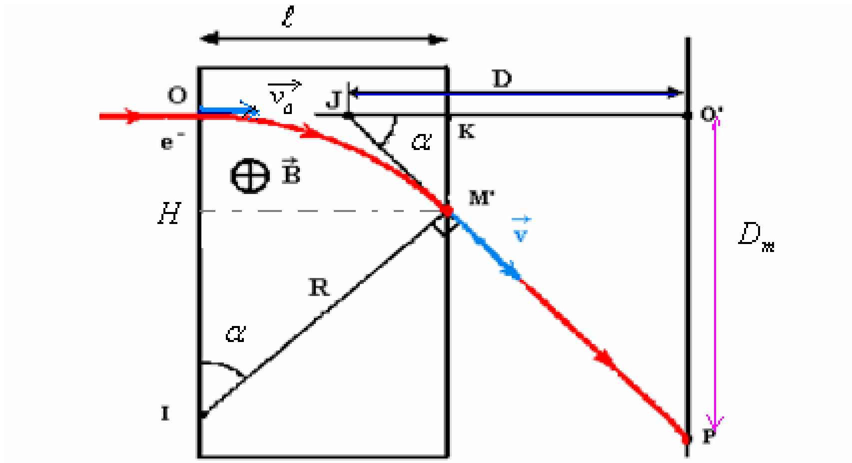
En projetant la relation (1) sur la normale $|q|.v.B = m.\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{m.v}{|q|.B}}$

Le rayon est constant donc le mouvement est circulaire.

5) La déviation magnétique :

On fait pénetrer un faisceau d'électron dans une région de l'espace de largeur ℓ dans laquelle règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme avec une vitesse $\vec{v}_o$, le faisceau d'électrons est soumis à l'action de la force magnétique et son mouvement devient circulaire de rayon : $R = \dfrac{m.v_o}{|q|.B}$ dans le champ magnétque.

Les électron du faisceau quittent le champ magnétique au point S et prennent un mouvement rectiligne uniforme jusqu'à ce qu'ils rencontrent l'écran au point P.
Le faisceau d'électron rencontre l'écran au point O'.
On appelle **déviation magnétique** la distance D_m=O'P



On a dans le triangle rectangle $(\widehat{HM'I})$: $\sin\alpha = \dfrac{\ell}{R}$

et dans le triangle rectangle $(\widehat{JPO'})$: $\tan\alpha = \dfrac{D_m}{D}$

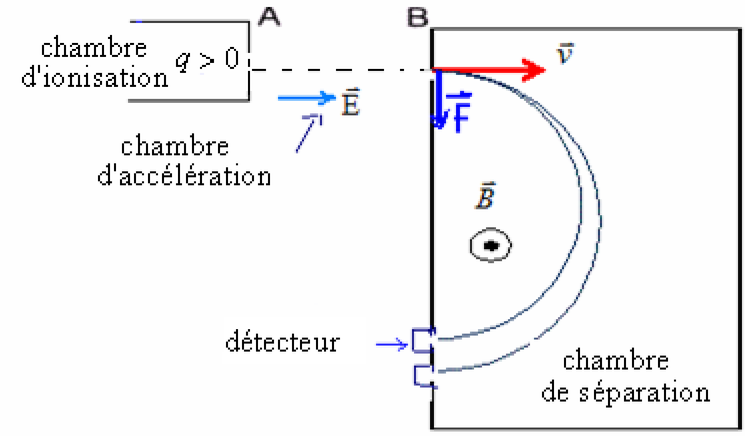
Dans les appareils utilisés on a généralement des angles α petits , on a alors : $\tan\alpha \approx \sin\alpha$

$$\Rightarrow \frac{D_m}{D} = \frac{\ell}{R} \quad \text{avec : } R = \frac{m.v_o}{|q|.B} \quad \text{donc la déviation magnétique} \quad D_m = \frac{\ell.D.|q|.B}{m.v_o} :$$

IV-Applications:

1) Le spectromètre de masse:

Le spectromètre de masse est un appareil qui permet de séparer des ions ayant des masses et des charges différentes (comme les isotopes)en utilisant les actions d'un champ magnétique et d'un champ électrique, il se compose de:
- **Une chambre d'ionisation** à partir de laquelle partent les ions avec une vitesse nulle.
-Une chambre d'accélération: dans laquelle on accélère les ions par un champ électrique uniforme et les ions la quitte . avec une vitesse $\vec{v}$.
Une chambre de séparation dans laquelle on sépare les ions en utilisant un champ magnétique uniforme $\vec{B} \perp \vec{v}$ et dans laquelle les ions décrivent une trajectoire demi-circulaire.



Les ions sont accélérés par un champ électrique uniforme dans la chambre d'accélération :
En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre A et B :

$$\Delta Ec_{A->B} = W\vec{F}_{A->B} \qquad q > 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = qU_{AB} \quad => \quad v = \sqrt{\frac{2qU_{AB}}{m}}$$

Or les ions ont des masses différentes, ils pénètrent dans la chambre de séparation par des vitesses différentes.

Lorsque l'ion qui pénètre dans la chambre de séparation avec une vitesse $\vec{v} \perp \vec{B}$ il sera soumis à l'action de la force magnétique $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$ et aura un mouvement circulaire de rayon : $R = \frac{m.v_o}{|q|.B}$

Chaque ion décrira un demi cercle de diamètre : $: D = 2R = 2\frac{m.v}{|q|.B}$

Or le rayon dépend de la masse, chaque isotope aura un cercle différent de celui des autres, ce qui permettra de séparer les isotopes les uns des autres.

2) Le cyclotron:

Le cyclotron est un accélérateur de particules ; il se compose de deux boites sous forme de demi cylindre appelées : des "dees" posées dans un champ magnétique uniforme et entre les boites existe un oscillateur qui produit un champ électrique uniforme et alternatif de période T égale à la demi période de rotation de la particule dans sa trajectoire circulaire et de cette façon la particule est accélérée chaque fois qu'elle pénètre dans le champ électrique et finalement la particule quitte le cyclotron avec une grande vitesse.