Physique 13 : Le dispositif solide-ressort

1. Quelles sont les caractéristiques du mouvement d'un solide accroché à un ressort ?

Lorsque les amortisseurs d'un véhicule sont usés, le véhicule peut être soumis à des oscillations dues au ressort de la suspension (voir l'*activité préparatoire A*, page 291). Étudions le mouvement d'un solide accroché à un ressort et pouvant coulisser sur un axe horizontal.

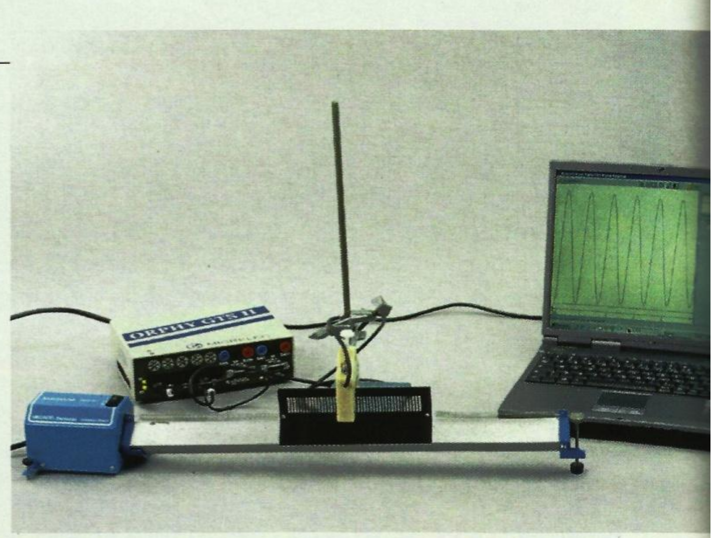
1.1 Étude d'un oscillateur faiblement amorti

Activité 1

Quel est le mouvement d'un solide accroché à un ressort ?

• Réaliser le montage du ***document 1***. Le solide lié à deux ressorts peut glisser sur un rail à coussin d'air horizontal. On montre que l'ensemble des deux ressorts est équivalent à un ressort unique (voir l'exercice 9, page 306).
Un dispositif d'acquisition permet d'étudier le mouvement du solide.
• Écarter le solide de sa position d'équilibre, le relâcher et lancer l'acquisition.
• Obtenir la représentation graphique de la position du centre d'inertie du solide en fonction du temps.
• Reprendre l'expérience en modifiant la masse m du solide (avec les mêmes ressorts), puis en changeant les ressorts (avec la même masse m).

1. Quelle est la nature du mouvement du solide de masse m ?
2. Quelle est l'influence de la masse m du solide sur le mouvement observé ?
3. Observe-t-on le même mouvement avec d'autres ressorts ?



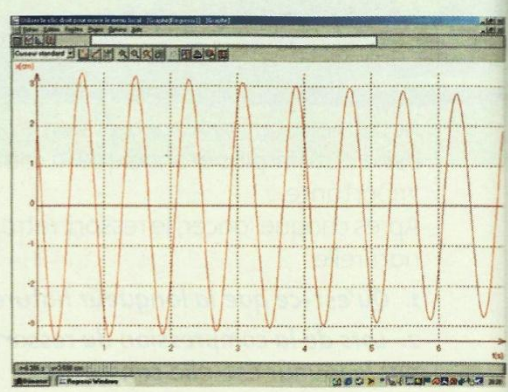
Doc. 1 *Le solide, attaché à l'extrémité libre du ressort, effectue des oscillations.*

> Observation

Les oscillations sont périodiques et très peu amorties [**Doc. 2**].

La période des oscillations augmente avec la masse m du solide et elle dépend des ressorts utilisés.

Un solide relié à un ressort dont l'une des extrémités est fixe constitue un oscillateur élastique en translation.



Doc. 2 *Évolution, en fonction du temps, de la position du centre d'inertie du solide.*

1.2 Étude de l'amortissement des oscillations

Activité 2

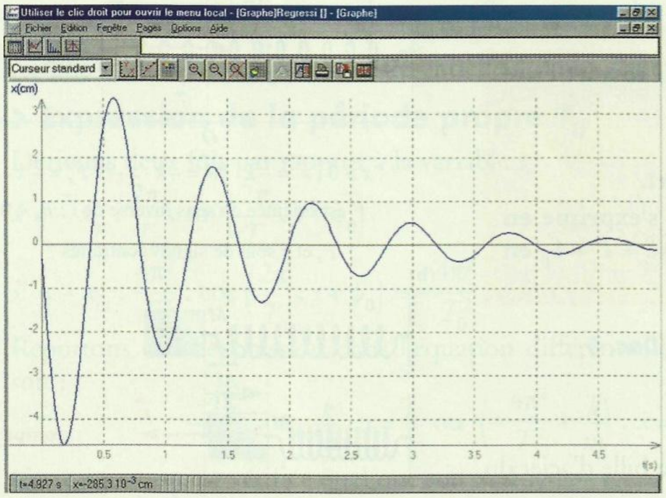
Quelle est l'influence de l'amortissement ?

• Reprendre le dispositif expérimental de l'*activité* 1.
• Fixer une palette sur le solide, perpendiculairement à la direction du déplacement, pour augmenter les frottements de l'air.

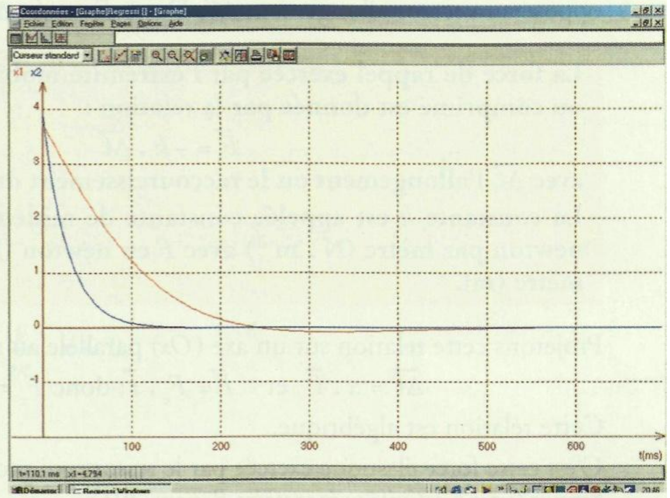
Quelle est l'influence d'une augmentation des frottements sur le mouvement du solide ?

> Observation

• Si l'on accroît légèrement les frottements à l'aide d'une palette fixée sur le mobile, on observe un mouvement **pseudo-périodique** *[Doc. 3]*.



Doc. 3 *Oscillations pseudo-périodiques du solide.*



Doc. 4 *Mouvements apériodiques. La courbe bleue correspond au régime critique : le retour à la position d'équilibre est le plus rapide.*

• Pour des frottements importants, le mouvement cesse d'être oscillatoire : il est alors **apériodique** *[Doc. 4]*.

• Pour une valeur particulière de la force de frottement, l'oscillateur retourne à sa position de repos, sans osciller, au cours d'une durée minimale *[Doc. 4]* : **l'amortissement est critique**. Cette situation est recherchée dans le cas des suspensions d'automobile.

> *Pour s'entraîner : Ex. 2 et 3*

2. Quelles sont les caractéristiques de la force de rappel exercée par un ressort ?

La force $\vec{F}$ exercée par le ressort sur le solide agit de manière à le ramener vers sa position de repos lorsqu'il s'en écarte : **$\vec{F}$ est une force de rappel.**

Quelle est la relation entre cette force et l'allongement du ressort ?

Suspendons des solides de masses différentes à l'extrémité mobile M d'un ressort *[Doc. 5]*. Le solide est soumis à son poids $\vec{P}$ et à l'action $\vec{F}$ exercée par l'extrémité M du ressort. À l'équilibre :

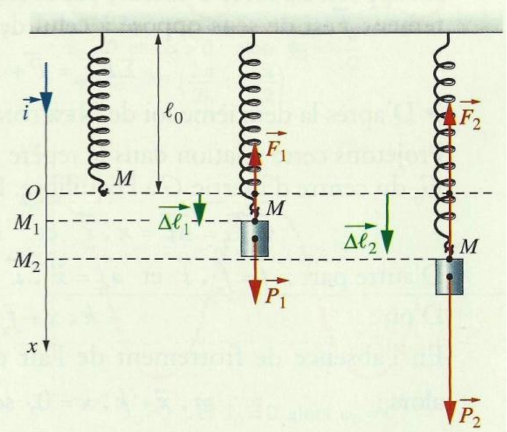
$$\vec{F} + \vec{P} = \vec{0}, \text{ soit } F = P = m \cdot g.$$

Sur un axe (Ox) vertical descendant, notons O l'abscisse de M lorsque le ressort a sa longueur naturelle ℓ_0, puis M_1, M_2, les abscisses de M lorsque des masses m_1 et m_2 sont accrochées *[Doc. 5]*. Si nous notons ℓ_1 et ℓ_2 les longueurs correspondantes du ressort :

$$\overrightarrow{OM_1} = (\ell_1 - \ell_0) \cdot \vec{i} = \Delta\ell_1 \cdot \vec{i} = \Delta\vec{\ell}_1 ;$$

$$\overrightarrow{OM_2} = (\ell_2 - \ell_0) \cdot \vec{i} = \Delta\ell_2 \cdot \vec{i} = \Delta\vec{\ell}_2.$$

$\Delta\vec{\ell}_1$ et $\Delta\vec{\ell}_2$ représentent les vecteurs allongements respectifs du ressort correspondant aux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.



Doc. 5 *Allongement d'un ressort. Ces schémas correspondent à des états d'équilibre. Pour $m_2 = 2\,m_1$, on a : $\Delta\ell_2 = 2\Delta\ell_1$.*

3.2 Les solutions de l'équation différentielle

Montrons qu'une fonction périodique de la forme :

$$x = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right), \text{ où } x_m,\ T_0 \text{ et } \phi_0 \text{ sont des constantes,}$$

est une solution de l'équation différentielle du mouvement.

> Expression de la période propre T_0

Dérivons deux fois par rapport à la variable t :

$$\dot{x} = -x_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right).$$

$$\ddot{x} = -x_m \cdot \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right) = -\frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot x.$$

Reportons cette expression dans l'équation différentielle : $\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$, soit :

$$-\frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot x + \frac{k}{m} \cdot x = 0 \text{ ou } \left(-\frac{4\pi^2}{T_0^2} + \frac{k}{m}\right) \cdot x = 0.$$

Cette équation est vérifiée quel que soit x, si :

$$\frac{k}{m} = \frac{4\pi^2}{T_0^2}, \text{ soit } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

- **La fonction $x = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right)$ est solution de l'équation différentielle du mouvement.**
- **La période propre des oscillations du solide d'un dispositif solide-ressort est :**

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Vérifions l'homogénéité de cette expression : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

k s'exprime en $N \cdot m^{-1}$, équivalent à $(kg \cdot m \cdot s^{-2}) \cdot m^{-1}$, soit $kg \cdot s^{-2}$.

$\frac{m}{k}$ s'exprime donc en $kg \cdot (kg \cdot s^{-2})^{-1}$, soit en $kg \cdot kg^{-1} \cdot s^2$, c'est-à-dire en s^2.

Comme 2π n'a pas d'unité, $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ est bien homogène à un temps.

$2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ s'exprime donc en s, comme T_0.

> Détermination des constantes d'intégration

x_m est l'**amplitude** du mouvement ($x_m > 0$), $\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right)$ est la **phase** du mouvement et ϕ_0 est la **phase à l'origine des dates** ($t = 0$).

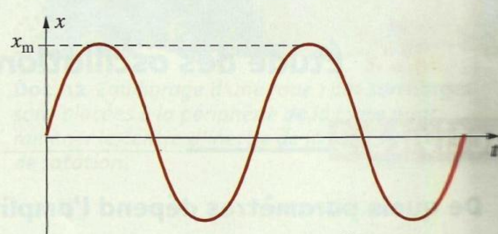
Les valeurs des constantes d'intégration, x_m et ϕ_0, ne dépendent que des conditions initiales (position et vitesse initiales) **[Doc. 8]**.

Ainsi, avec $x = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right)$ et $\dot{x} = -\frac{2\pi}{T_0} \cdot x_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right)$,

on a, à la date $t = 0$, $x_0 = x_m \cdot \cos\phi_0$ et $\dot{x}_0 = -\frac{2\pi}{T_0} \cdot x_m \cdot \sin\phi_0$.

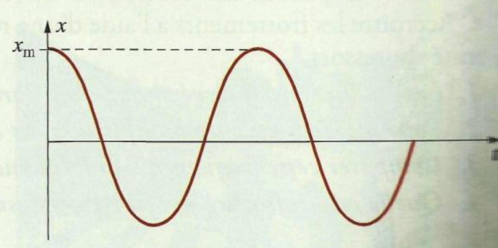
Si à $t = 0$, $x_0 = 0$, alors $\cos\phi_0 = 0$ et $\phi_0 = +\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

On en déduit $\sin\phi_0 = +1$ ou -1. On lève cette indétermination en connaissant le signe de la vitesse initiale $\dot{x}_0$.



$x_0 = 0$ et $\dot{x}_0 > 0$; alors $\phi_0 = -\frac{\pi}{2}$

$x = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$



$x_0 = x_m$ et $\dot{x}_0 = 0$ alors $\phi_0 = 0$

$x = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right)$

Doc. 8 *Représentations de l'élongation en fonction du temps pour des conditions initiales différentes.*

4. Comment mettre un pendule en oscillations forcées ?

Dans l'*activité préparatoire B*, page 275, si le personnage pousse périodiquement selon la période de la balançoire, l'amplitude des oscillations augmente.

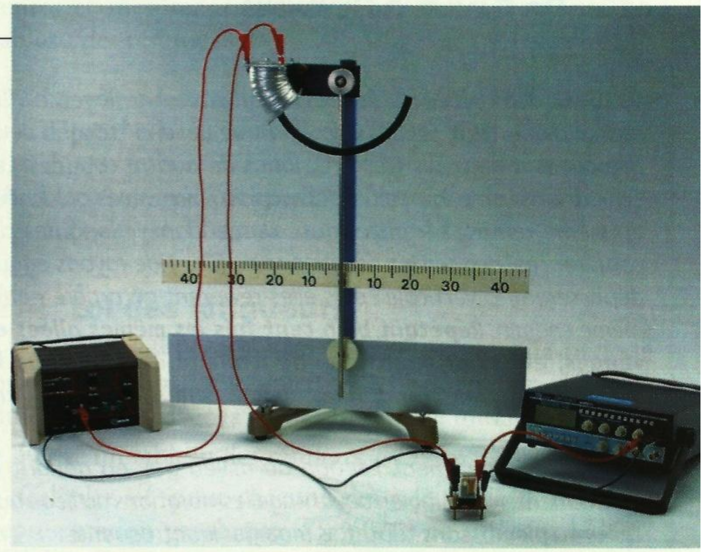
Activité 3

Quel est le comportement d'un pendule asservi, selon la fréquence qui lui est imposée ?

Le dispositif d'étude comporte un pendule constitué d'un disque pesant fixé à une tige.
À la partie supérieure de la tige est soudé un arc en fer pouvant pénétrer dans une bobine **[Doc. 10]**.
Cette bobine est alimentée par un générateur qui délivre des impulsions de courant, de courte durée et de période T_E.
À chaque impulsion, l'arc en fer subit une force magnétique attractive de la part de la bobine.

- Déterminer la période propre T_0 des oscillations en l'absence de courant dans la bobine.
- Faire varier la période de l'excitateur, T_E, de $\frac{T_0}{2}$ à $2T_0$.
- Accroître l'amortissement du pendule à l'aide du dispositif de freinage, puis recommencer l'expérience.

1. Comparer T et T_E.
2. Pour quelle valeur de T_E l'amplitude θ_m des oscillations est-elle maximale ?
3. Quelle est l'influence de l'amortissement ?



Doc. 10 *Le dispositif expérimental.*

> Observation

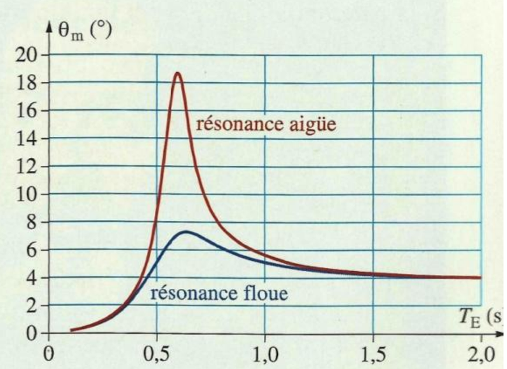
La période T des oscillations du pendule est toujours égale à la période T_E de la force magnétique.
L'amplitude θ_m :
– est maximale lorsque T_E est voisin de la période propre T_0 des oscillations du pendule **[Doc. 11]** ;
– est d'autant plus grande que l'amortissement est faible.

> Interprétation

Le dispositif (bobine-générateur) est appelé **excitateur.**
Le pendule mis en oscillations forcées est appelé **résonateur.**
Lorsque T_E est voisin de T_0, l'amplitude θ_m est maximale : il y a **résonance.**
L'amplitude θ_m des oscillations est d'autant plus grande que l'amortissement est faible : la résonance est alors dite **aiguë.**
Si l'amortissement est très important, la résonance disparaît : θ_m ne passe plus par un maximum.

Lorsqu'un pendule est soumis à des actions périodiques d'un système excitateur :
- **la période des oscillations forcées est imposée par l'excitateur ;**
- **à la résonance, l'amplitude des oscillations du résonateur est maximale. Pour un oscillateur peu amorti, la résonance a lieu pour une période voisine de sa période propre.**

> *Pour s'entraîner : Ex. 7*



Doc. 11 *Courbes théoriques donnant les variations de l'amplitude θ_m en fonction de la période T_E pour différents amortissements.*

Exercice d'entraînement

Un oscillateur (m, k) est constitué d'un ressort de raideur $k = 26\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ auquel est accroché un solide de masse $m = 520$ g. Les frottements sont négligeables.

À l'instant $t = 0$: $x = 0$ m et $\dot{x}(0) = 20\ \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

1. Exprimer, puis calculer la période propre T_0.

2. Le mouvement est de la forme $x = x_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right)$. Déterminer x_m et θ_0.

1. $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Numériquement : $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{0{,}520}{26}} = 0{,}89$ s.

2. Dérivons par rapport à la variable t :

$$\dot{x} = -x_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi_0\right).$$

À l'instant $t = 0$, on obtient : $x_0 = 0 = x_m \cdot \cos\phi_0$ **(1)**

et $\dot{x}_0 = 0{,}20 = -x_m \cdot \dfrac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\phi_0$ **(2)**.

La relation **(1)** implique : $\phi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$.

La relation **(2)** implique : $\sin\phi_0 < 0$, car $x_m > 0$ et $T_0 > 0$.

Donc $\phi_0 = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\sin\phi_0 = -1$;

en reprenant la relation **(2)** : $x_m = 0{,}20 \times \dfrac{T_0}{2\pi} = 2{,}8 \times 10^{-2}$ m.

Finalement :

$$x = 2{,}8 \times 10^{-2} \times \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = 2{,}8 \times 10^{-2} \times \cos\left(7{,}1\, t - \frac{\pi}{2}\right).$$

> ***Pour s'entraîner : Ex. 6, 7, 9 et 10***

4. Comment varie l'amplitude des oscillations mécaniques forcées d'un dispositif solide-ressort ?

Sur une piste ondulée, la conduite automobile est difficile à certaines vitesses, car les oscillations du véhicule (voir l'*activité préparatoire A*, page 291) prennent une grande amplitude ***[Doc. 9]***. Étudions ce phénomène.

Doc. 9 *Automobile sur une piste ondulée.*

4.1 Étude des oscillations forcées

Activité 3

De quels paramètres dépend l'amplitude des oscillations ?

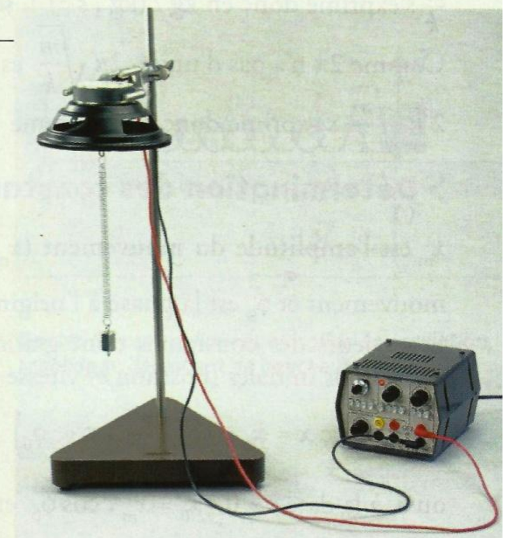
- Réaliser le montage du ***document 10***. Sur la membrane du haut-parleur est fixé un ressort auquel est suspendu un solide.
- Faire varier la fréquence de vibration de la membrane du haut-parleur.
- Noter l'amplitude des oscillations du solide.
- Accroître les frottements à l'aide d'une rondelle en carton accrochée à l'extrémité du ressort.

1. Les oscillations observées sont-elles libres ou forcées ?

2. Pour quelle fréquence l'amplitude des oscillations est-elle maximale ?

3. Comparer cette fréquence à la fréquence propre du dispositif solide-ressort.

4. Quelle est l'influence des frottements sur l'amplitude des oscillations ?

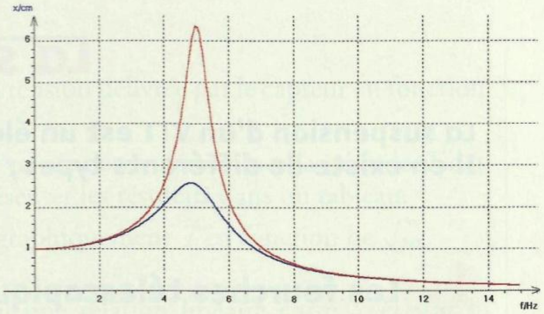


Doc. 10 *Oscillations d'un dispositif solide-ressort fixé à la membrane d'un haut-parleur.*

> Observation

La force exercée, par la membrane du haut-parleur, à l'extrémité supérieure du ressort provoque la mise en mouvement de l'oscillateur qui effectue des oscillations verticales. La fréquence de ces oscillations est égale à la fréquence de vibration de la membrane, imposée par le générateur basse fréquence.

Pour une valeur particulière de la fréquence de vibration de la membrane, l'amplitude des oscillations de l'oscillateur est maximale.



Doc. 11 *Courbes de résonance d'un oscillateur élastique.*
En abscisse figure la fréquence, en ordonnée l'amplitude.
Courbe rouge : résonance aiguë.
Courbe bleue : résonance floue.

> Interprétation

Le dispositif solide-ressort, soumis à une *force périodique* exercée par un dispositif appelé **excitateur** (la membrane du haut-parleur), effectue des **oscillations forcées.** La fréquence de ces oscillations est imposée par l'excitateur.

Pour une valeur particulière de la fréquence de la force excitatrice, l'amplitude des oscillations forcées est maximale : il y a **résonance d'amplitude.** L'oscillateur est appelé **résonateur.**

Lorsque l'amortissement du résonateur est faible, l'amplitude des oscillations forcées à la résonance est très grande : **la résonance est aiguë** *[Doc. 11]*.

La fréquence à la résonance est voisine de la fréquence propre $f_0 = \dfrac{1}{T_0}$.

L'accroissement de l'amortissement du résonateur se traduit par une diminution de l'amplitude des oscillations forcées et par une atténuation de la résonance : **la résonance est floue** *[Doc. 11]*. La fréquence de la résonance s'écarte alors de la fréquence propre de l'oscillateur.

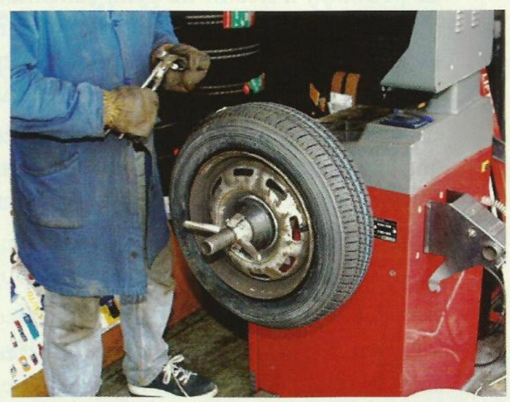
4.2 Manifestations de la résonance mécanique

> Le haut-parleur

La membrane d'un haut-parleur vibre avec la fréquence imposée par la force magnétique produite par le courant qui alimente sa bobine.

L'amortissement est réglé de manière à obtenir une résonance floue afin de ne pas privilégier des fréquences particulières.

> Les roues d'automobiles



Doc. 12 *Équilibrage d'une roue : des surcharges sont placées à la périphérie de la jante pour ramener le centre d'inertie de la roue sur l'axe de rotation.*

Lorsqu'une roue d'automobile n'est pas équilibrée (son centre d'inertie n'est pas sur l'axe de rotation de la roue), il apparaît une vibration gênante pour la conduite : le shimmy.

Si une pièce métallique ou faisant partie de la carrosserie est mal fixée, elle peut se mettre en vibration et entrer en résonance avec une amplitude importante pour une certaine vitesse de l'automobile et engendrer un bruit fort désagréable.

Il est donc nécessaire de faire équilibrer les roues du véhicule *[Doc. 12]*.

> Les machines tournantes

Les moteurs électriques, alternateurs ou outils en rotation, s'ils sont mal équilibrés, peuvent engendrer des vibrations importantes avec des conséquences très dommageables pour la machine et son environnement.

> Les ouvrages d'art antisismiques

Doc. 13 *Construction antisismique.*

Les immeubles ou les barrages, construits dans les régions sismiques, doivent être conçus de manière à éviter les résonances avec les vibrations possibles du sol *[Doc. 13]*.

Les tremblements de Terre font de nombreuses victimes lorsque les habitations ne sont pas construites avec les normes antisismiques. Le tremblement de Terre qui a eu lieu au Pakistan en 2005, a fait plusieurs dizaines de milliers de victimes.

> *Pour s'entraîner : Ex. 11 et 15*