

| | | | | |
|--------|----------------------|--|--|-------|
| الصفحة | 1 | الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا الدورة العادية 2021 - الموضوع - | الجمهورية المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي المركز الوطني للتقويم والامتحانات | |
| 4 | SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | | | NS 24 |
| **1 | | | | |
| 4h | مدة الإنجاز | الرياضيات | المادة | |
| 9 | المعامل | شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) | الشعبة أو المسلك | |

- مدة الاختبار هي أربع ساعات.

- يتضمن موضوع الاختبار 3 تمارين مستقلة فيما بينها.

- يمكن أن تعالج التمارين حسب الترتيب الذي يختاره المترشح.

- التمرين 1 يتعلق بالتحليل.....(12 نقط)
- التمرين 2 يتعلق بالأعداد العقدية.....(4 نقطة)
- التمرين 3 يتعلق بالحسابيات.....(4 نقط)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر في الكتابة

التمرين 1: (12 نقط)

لكل عدد صحيح طبيعي n ، نعتبر الدالة f_n المعرفة على \mathbb{R} بما يلي: $f_n(x) = \frac{-2e^x}{1+e^x} + nx$

و ليكن (C_n) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (نأخذ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$)

الجزء I:

1- أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - nx + 2)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5

ب) بين أن المنحنى (C_n) يقبل، في $-\infty$ ، مقاربا (Δ_n) يتم تحديد معادلة ديكارتية له. 0.5

2- أ) بين أن الدالة f_n قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} وأن: $f'_n(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) ; 0.5

ب) بين أن: $\frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) ; 0.5

ج) استنتج تغيرات الدالة f_n على \mathbb{R} (نفصل بين الحالتين: $n=0$ و $n \geq 1$) 0.5

3- أ) حدد معادلة المماس للمنحنى (C_n) في النقطة I ذات الأفصول 0 0.5

ب) بين أن النقطة I هي نقطة الانعطاف الوحيدة للمنحنى (C_n) 0.5

4- مثل مبيانيا في نفس المعلم، المنحنيين (C_0) و (C_2) 0.5

5- لكل عدد حقيقي $t > 0$ ، نضع $A(t)$ مساحة الحيز المستوي المحصور بالمنحنى (C_n) و المستقيمت

ذات المعادلات بالتوالي: $y = nx - 2$ و $x = 0$ و $x = t$

أ) احسب $A(t)$ لكل $t > 0$ 0.5

ب) احسب $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t)$ 0.5

الجزء II:

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = f_0(u_n)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ;

1- أ) بين أن المعادلة $f_0(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في \mathbb{R} 0.5

ب) بين أن: $|f'_0(x)| \leq \frac{1}{2}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) ; 0.5

2- أ) بين أن: $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ; 0.5

ب) استنتج أن: $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ; 0.5

ج) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تؤول إلى α 0.5

الجزء III:

نفترض في هذا الجزء أن $n \geq 2$

0.5 1- أ) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد x_n هو حل للمعادلة $f_n(x) = 0$

0.5 ب) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ ، $0 < x_n < 1$ (نأخذ $\frac{2e}{1+e} < 1.47$)

0.5 2- أ) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ ، $f_{n+1}(x_n) > 0$

0.5 ب) استنتج أن المتتالية $(x_n)_{n \geq 2}$ تناقصية قطعاً.

0.5 ج) بين أن المتتالية $(x_n)_{n \geq 2}$ متقاربة.

0.5 3- أ) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ ، $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n} \left(\frac{2e}{1+e} \right)$

0.5 ب) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ ثم بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1$

0.5 4- أ) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ ، لدينا: $x_n \leq x_2$

0.5 ب) استنتج: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^n$

التمرين 2: (4 نقطة)

لتكن a و b و c ثلاثة أعداد عقدية غير منعدمة بحيث: $a + b \neq c$

0.5 1- أ) حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - (a + b + c)z + c(a + b) = 0$: (E)

0.5 ب) نفترض في هذا السؤال أن: $a = i$ و $b = e^{\frac{i\pi}{3}}$ و $c = a - b$
اكتب حل المعادلة (E) على الشكل الأسّي.

2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v})

نعتبر النقط الثلاث $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ التي نفترض أنها غير مستقيمية.

ليكن $P(p)$ مركز الدوران الذي زاويته $\frac{\pi}{2}$ و يحول B إلى A و $Q(q)$ مركز الدوران الذي زاويته

$\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ و يحول C إلى A و $D(d)$ منتصف القطعة $[BC]$

1 أ) بين أن: $2p = b + a + (a - b)i$ و $2q = c + a + (c - a)i$

0.5 ب) احسب: $\frac{p-d}{q-d}$

0.5 ج) استنتج طبيعة المثلث PDQ

| | | | |
|--------|---|-------|--|
| الصفحة | 4 | NS 24 | الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2021 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) |
| 4 | | | |

3- لتكن E ممثلة B بالنسبة للنقطة P و F ممثلة C بالنسبة للنقطة Q و K منتصف القطعة $[EF]$

(أ) بين أن لحد K هو $k = a + \frac{i}{2}(c-b)$ 0.5

(ب) بين أن النقط K و P و Q و D متداورة. 0.5

التمرين 3: (4 نقط)

الجزء I: نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $(E) : 47x - 43y = 1$

1- تحقق أن الزوج $(11, 12)$ حل خاص للمعادلة (E) 0.25

2- حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E) 0.75

الجزء II: نعتبر في \mathbb{Z} المعادلة $(F) : x^{41} \equiv 4 \pmod{43}$

1- ليكن $x \in \mathbb{Z}$ حلا للمعادلة (F)

(أ) بين أن x و 43 أوليان فيما بينهما ثم استنتج أن: $x^{42} \equiv 1 \pmod{43}$ 0.5

(ب) بين أن: $x \equiv 11 \pmod{43}$ $4x \equiv 1 \pmod{43}$ ثم استنتج أن: $x \equiv 11 \pmod{43}$ 0.5

2- حدد مجموعة حلول المعادلة (F) في \mathbb{Z} 0.5

الجزء III: نعتبر في \mathbb{Z} النظام من معادلتين: $(S) : \begin{cases} x^{41} \equiv 4 \pmod{43} \\ x^{47} \equiv 10 \pmod{47} \end{cases}$

1- ليكن x حلا للنظمة (S) .

(أ) بين أن x حل للنظمة: $(S') : \begin{cases} x \equiv 11 \pmod{43} \\ x \equiv 10 \pmod{47} \end{cases}$ 0.5

(ب) استنتج أن: $x \equiv 527 \pmod{2021}$ (يمكنك استعمال الجزء I) 0.5

2- حدد في \mathbb{Z} مجموعة حلول النظمة (S) 0.5

انتهى

| | |
|--------|-----|
| الصفحة | 1 |
| 2 | **1 |

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2021
- عناصر الإجابة -

+DIAEPI HCHOEO
+C.A.M.O.H | SORCE J.C.E.O
A SOEZHAT XKKELI
A SOEICA J.E.H.A | A SOEKE J.E.H.A



السلطة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS

NR 24

| | | | |
|----|-------------|--------------------------------|------------------|
| 4h | مدة الإنجاز | الرياضيات | المادة |
| 9 | المعامل | شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) | الشعبة أو المسلك |

| سلم التقييم | عناصر الإجابة | التمرين I |
|-------------|---|--------------------|
| 0.25 | - نبين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - nx + 2) = 0$ | الجزء I: -1 (أ) |
| 0.25 | - المستقيم ذو المعادلة $y = nx - 2$ مقارب للمنحنى (C_n) بجوار $+\infty$ | |
| 0.5 | نبين أن المستقيم $y = nx$: (Δ_n) مقارب للمنحنى (C_n) بجوار $-\infty$ كل جواب ناقص ينقط 0 | (ب) |
| 0.25 | - البرهنة على أن f_n قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} | -2 (أ) |
| 0.25 | - إثبات تعبير $f'_n(x)$ | |
| 0.5 | البرهنة على المتفاوتة | (ب) |
| 0.5 | f_0 تناقصية قطعاً على \mathbb{R} و من أجل $n \geq 1$ f_n تزايدية قطعاً على \mathbb{R} كل جواب ناقص ينقط 0 | (ج) |
| 0.5 | تحديد معادلة المماس. | -3 (أ) |
| 0.5 | البرهنة على أن $I(0; -1)$ هي نقطة الانعطاف الوحيدة للمنحنى (C_n) | (ب) |
| 0.25 | التمثيل المبياني للمنحنى (C_0) | -4 |
| 0.25 | التمثيل المبياني للمنحنى (C_2) | |
| 0.5 | حساب $A(t)$ | -5 (أ) |
| 0.5 | تحديد $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t)$ | (ب) |
| 0.5 | البرهنة على وجود وحدانية α كل جواب ناقص ينقط 0 | -1 (أ) |
| 0.5 | البرهنة على المتفاوتة | (ب) |
| 0.5 | البرهنة على المتفاوتة | -2 (أ) |
| 0.5 | البرهنة على المتفاوتة | (ب) |
| 0.5 | البرهنة على تقارب المتتالية نحو α | (ج) |
| 0.5 | البرهنة على وجود وحدانية x_n | -1 (أ) |
| 0.5 | إثبات المتفاوتة المزدوجة. | (ب) |
| 0.5 | البرهنة على المتفاوتة. | -2 (أ) |

الجزء II:

الجزء III:

| | | |
|--------|-------|--|
| الصفحة | NR 24 | الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2021 - عناصر الإجابة - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) |
| 2 | | |

| | | | |
|------|--|-----|----|
| 0.5 | البرهنة على أن المتتالية تناقصية قطعا. | (ب) | -3 |
| 0.5 | إثبات أن المتتالية $(x_n)_{n \geq 2}$ متقاربة. | (ج) | |
| 0.5 | البرهنة على المتفاوتة المزدوجة. | (أ) | |
| 0.25 | حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ | (ب) | |
| 0.25 | البرهان أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1$ | (ب) | |
| 0.5 | البرهنة على المتفاوتة. | (أ) | |
| 0.5 | استنتاج النهاية. | (ب) | -4 |

| سلم التقييم | عناصر الإجابة | التمرين 2 |
|-------------|-------------------------------------|-----------|
| 0.5 | حل المعادلة جميع طرق الحل مقبولة | -1 (أ) |
| 0.25x2 | كتابة الحلين على شكل أسّي. | (ب) |
| 0.5x2 | البرهنة على المتساويتين. | -2 (أ) |
| 0.5 | حساب الخارج. | (ب) |
| 0.5 | تحديد طبيعة PDQ | (ج) |
| 0.5 | البرهنة على المتساوية. | -3 (أ) |
| 0.5 | البرهنة على تداول النقط الأربع. | (ب) |

| سلم التقييم | عناصر الإجابة | التمرين 3 |
|-------------|--|-------------------|
| 0.25 | التحقق | -1 الجزء I: |
| 0.75 | حل المعادلة (E) مع تعليل كافة المراحل. كل إجابة ناقصة تنقط 0. | -2 |
| 0.25 | - البرهنة على أن x و 43 أوليان فيما بينهما..... | -1 (أ) الجزء II: |
| 0.25 | - البرهنة على التوافق [43] $x^{42} \equiv 1$ | (ب) |
| 0.25 | - البرهنة على التوافق [43] $4x \equiv 1$ | (ب) |
| 0.25 | - البرهنة على التوافق [43] $x \equiv 11$ | (ب) |
| 0.5 | تحديد مجموعة حلول المعادلة (F) | -2 |
| 0.25 | - البرهنة على أن [43] $x \equiv 11$ | -1 (أ) الجزء III: |
| 0.25 | - البرهنة على أن [47] $x \equiv 10$ | (أ) |
| 0.5 | البرهنة على أن [2021] $x \equiv 527$ كل إجابة ناقصة تنقط 0. | (ب) |
| 0.5 | تحديد مجموعة حلول النظمة (S) (الدراسة العكسية) كل إجابة ناقصة تنقط 0. | -2 |