

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة الاستدراكية 2022
- الموضوع -

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS

RS 24F

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

| | | | |
|---|-------------|--|------------------|
| 4 | مدة الإنجاز | الرياضيات | المادة |
| 9 | المعامل | مسلك العلوم الرياضية - أ و ب - خيار فرنسية | الشعبة أو المسلك |

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.

- L'épreuve comporte quatre exercices indépendants.

- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'exercice1 se rapporte à l'analyse(10 pts)
- L'exercice2 se rapporte aux nombres complexes.....(3.5 pts)
- L'exercice3 se rapporte aux structures algébriques.....(3.5 pts)
- L'exercice4 se rapporte à l'arithmétique(3 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE 1 : (10 points)

0.25 A-1- Montrer que : $(x \in]0, +\infty[) ; 1 + x \leq e^x$

0.25 2-a) Montrer que : $(x \in]0, +\infty[) ; 0 \leq 1 - e^{-x} \leq x$

0.5 b) En déduire que : $(x \in]0, +\infty[) ; 0 \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} \leq e^{-x} \leq \frac{x^3}{6}$

0.5 c) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x - e^{-x}}{x^2} = -\frac{1}{2}$

B- On considère la fonction f définie sur $I =]0, +\infty[$ par :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad (x \in]0, +\infty[) ; \quad f(x) = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$$

Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; i, j)$

0.5 1-a) Montrer que f est continue à droite en 0

0.25 b) Vérifier que : $(x > 0) ; \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1 - 2x - e^{-2x}}{x^2} - \frac{1 - x - e^{-x}}{x^2}$

0.5 c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que le nombre dérivé à droite en 0 est $\frac{3}{2}$

0.5 2-a) Montrer que : $(x > 0) ; f'(x) = \frac{e^{-2x}}{x^2} (2x + 1 - e^x (1 + x))$

0.5 b) Montrer que : $(x > 0) ; f'(x) \leq -e^{-2x}$
(On pourra utiliser : $1 + x \leq e^x$)

0.25 c) En déduire le sens de variations de f sur I

3- On admet que : $(x > 0) ; f''(x) = \frac{e^{-2x}}{x^3} (-4x^2 - 4x - 2 + e^x (2 + 2x + x^2))$

0.25 a) Montrer que : $(x > 0) ; 1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x$

0.5 b) En déduire que : $(x > 0) ; f''(x) > 0$

4- On admet que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{3}{2}$

0.5 a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

0.5 b) En déduire que : $(x \in I) ; |f'(x)| \leq \frac{3}{2}$

- 0.5 5-a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 0.25 b) Dresser le tableau de variations de f
- 0.25 c) Déterminer la position relative de la courbe (C) par rapport à sa demi-tangente au point $T(0;1)$
- 0.5 d) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O; i, j)$

C-1- Pour tout x de $[0;1]$, on pose : $g(x) = f(x) - x$

- 0.5 a) Montrer que g est une bijection de $[0;1]$ vers un intervalle J que l'on déterminera.
- 0.5 b) Montrer qu'il existe un unique réel $a \in]0;1[$ tel que $f(a) = a$

2- Pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier $k \in \{0;1,\dots,n\}$, on considère les nombres réels $x_k = \frac{ka}{n}$ et on pose :

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt \quad \text{et} \quad J_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dt$$

- 0.5 a) Montrer que : " $k \in \{0;1,\dots,n\}$; $|J_k - I_k| \leq \frac{3}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k) dt$
- 0.5 b) En déduire que : " $k \in \{0;1,\dots,n\}$; $|J_k - I_k| \leq \frac{3a^2}{4n}$

3- On pose : $L = \int_0^a f(t) dt$

- 0.5 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left| \frac{a^{k=n-1}}{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - L \right| \leq \frac{3a^2}{4n}$
- 0.25 b) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^{k=n-1}}{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt = \int_0^a f(t) dt$

EXERCICE2 : (3.5 points)

Soit $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1;0;1\}$

I- On considère dans \mathbb{R} l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$(E_m): \quad mz^2 - (m-1)^2z - (m-1)^2 = 0$$

- 0.25 1-a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est : $D = (m^2 - 1)^2$
- 0.5 b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m)

0.5 2) On prend uniquement dans cette question $m = e^{iq}$, avec $0 < q < p$

Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

II- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \hat{u}, \hat{v}) .

On considère les deux points A et B d'affixes respectives $m-1$ et $\frac{1}{m}-1$

0.5 1- Montrer que les points O , A et B sont alignés si et seulement si $m \hat{I}$;

2- On suppose que m n'est pas un nombre réel.

Soient C l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{p}{3}$ et D l'image du

point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{p}{3}$

et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[AD]$ et $[OB]$

0.5 a) Montrer que l'affixe du point C est : $c = m-1 + \frac{1}{m}e^{i\frac{p}{3}} - m\frac{1}{m}e^{i\frac{p}{3}}$

et que l'affixe du point D est : $d = (m-1)e^{i\frac{p}{3}}$

0.5 b) Montrer que : $2(p-r) = m-1 + \frac{1}{m}e^{i\frac{p}{3}} - m\frac{1}{m}e^{i\frac{p}{3}} - \frac{1}{m}e^{i\frac{p}{3}}$

$$\text{et } 2(q-r) = (m-1)e^{i\frac{p}{3}} - \frac{1}{m}e^{i\frac{p}{3}} - m\frac{1}{m}e^{i\frac{p}{3}}$$

0.25 c) Montrer que : $q-r = e^{i\frac{p}{3}}(p-r)$

0.5 d) Quelle est la nature du triangle PQR ? (justifier votre réponse)

EXERCICE3 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{C}), +, \cdot)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre

d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (La loi \cdot étant la multiplication usuelle des matrices)

Pour tout réel a on pose $M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ a+1 & 3 & -1 \\ 2a+3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

et soit $G = \{M(a) / a \in \mathbb{C}\}$

1- Soit j l'application de i vers $M_3(i)$ définie par : $(a \hat{=} i) ; j(a) = M(a)$

- 0.5 a) Montrer que j est un homomorphisme de $(i, +)$ vers $(M_3(i), ')$
- 0.5 b) Montrer que $j(i) = G$, en déduire que $(G, ')$ est un groupe commutatif.
- 0.5 c) Déterminer J l'élément neutre dans $(G, ')$
- 0.5 d) Déterminer l'inverse de $M(a)$ dans $(G, ')$
- 0.5 e) Résoudre dans $(G, ')$ l'équation : $M(1)' X = M(2)$

0.25 2-a) Montrer que : $(a \hat{=} i) ; M(a)' J = M(a)' I$

0.5 b) En déduire que pour tout $a \hat{=} i$, $M(a)$ n'est pas inversible dans $(M_3(i), ')$

0.25 c) Vérifier que les matrices de la forme $X = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ x+2 & 3 & 0 & 0 \\ 3x+5 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $x \hat{=} i$, sont

des solutions dans $(M_3(i), ')$ de l'équation : $M(1)' X = M(2)$

EXERCICE4 (3 points)

- 0.5 1- Montrer que 137 est un nombre premier.
- 0.5 2- Déterminer un couple (u, v) de ϕ^2 tel que : $38u + 136v = 2$
- 3- Soit $x \hat{=} \phi$ tel que : $x^{38} \circ 1$ [137]
- 0.5 a) Montrer que x et 137 sont premiers entre eux.
- 0.5 b) Montrer que : $x^{136} \circ 1$ [137]
- 0.5 c) Montrer que : $x^2 \circ 1$ [137]
- 0.5 4- Résoudre dans ϕ l'équation (E): $x^{19} \circ 1$ [137]

FIN

الصفحة : 1 على 2

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة الاستدراكية 2022

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والابتداء
المركز الوطني للتقويم والامتحانات



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والابتداء
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS

**I

- عناصر الإجابة -

RR 24F

9

المعامل

4

مدة
الإنجاز

الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية - أ و ب - خيار فرنسية

المادة
الشعبة والمسلك

| EXERCICE 1 | | Eléments de réponses | | Barème |
|------------|--------------------------|----------------------|---|--------|
| A- | 1- | Inégalité | | 0.25 |
| | 2- | a) | Double inégalité | 0.25 |
| | | b) | Déduction de la double inégalité | 0.5 |
| | | c) | Calcul de la limite | 0.5 |
| B- | 1- | a) | Continuité à droite en 0 | 0.5 |
| | | b) | Vérification de l'égalité | 0.25 |
| | | c) | Déduction de la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et du nombre dérivé à droite en 0 | 0.5 |
| | 2- | a) | Calcul de $f'(x)$ | 0.5 |
| | | b) | Démonstration de l'inégalité $f'(x) \leq -e^{-2x}$ | 0.5 |
| | | c) | f est strictement décroissante sur I | 0.25 |
| | 3- | a) | L'inégalité | 0.25 |
| | | b) | Déduction | 0.5 |
| | 4- | a) | Calcul de la limite | 0.5 |
| | | b) | Déduction | 0.5 |
| | 5- | a) | Calcul de limite..... | 0.25 |
| | | | Interprétation graphique | 0.25 |
| | | b) | T.V | 0.25 |
| | | c) | Position relative de (C) avec sa demi-tangente | 0.25 |
| d) | Représentation graphique | 0.5 | | |
| C- | 1- | a) | g est une bijection de $[0;1]$ vers $J = \left(\frac{e-1}{e}, \frac{e^2-1}{e^2} \right)$ | 0.5 |
| | | b) | Existence et unicité de a | 0.25x2 |
| | 2- | a) | $ I_k - J_k \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) - f(x_k) dt$ puis application de l'inégalité des accroissements finis | 0.5 |
| | | b) | Déduction de l'inégalité | 0.5 |
| | 3- | a) | Démonstration de l'inégalité | 0.5 |
| | | b) | Déduction de la limite | 0.25 |

| EXERCICE2 | | | Eléments de réponses | Barème |
|-----------|----|---|---|--------------|
| I- | 1- | a) | Le calcul du discriminant | 0.25 |
| | | b) | Détermination de z_1 et z_2 | 0.25x2 |
| | 2- | Formes exponentielles de z_1 et z_2 | | 0.25x2 |
| II- | 1- | Equivalence | | 0.5 |
| | 2- | a) | Calcul de c et de d | 0.25x2 |
| | | b) | Calcul de $2(p - r)$ et de $2(q - r)$ | 0.25x2 |
| | | c) | L'égalité | 0.25 |
| | | d) | Le triangle PQR est équilatéral Justification..... | 0.25 0.25 |

| EXERCICE3 | | Eléments de réponses | Barème |
|-----------|--------------------------|--|--------|
| 1- | a) | j homomorphisme | 0.5 |
| | b) | $j(i) = G$ | 0.25 |
| | | $(G, ')$ groupe commutatif..... | 0.25 |
| | c) | Détermination de J | 0.5 |
| | d) | Détermination de l'inverse de $M(a)$ dans le groupe $(G, ')$ | 0.5 |
| e) | Résolution de l'équation | 0.5 | |
| 2- | a) | Démonstration de l'égalité $M(a)' I = M(a)' J$ | 0.25 |
| | b) | Déduction | 0.5 |
| | c) | Vérification | 0.25 |

| EXERCICE4 | | Indications de solutions | Barème |
|-----------|---------------------------------------|---|--------|
| 1- | 137 premier | | 0.5 |
| 2- | Algorithme d'Euclide | | 0.5 |
| 3- | a) | Théorème de BEZOUT ou toute autre méthode juste | 0.5 |
| | b) | Théorème de FERMAT | 0.5 |
| | c) | Application de 2- | 0.5 |
| 4- | $S = \{1 + 137k : k \in \mathbb{Z}\}$ | | 0.5 |