

فروض النجاح استعدادا لاجتياز فروضك	مبادئ في المنطق المجموعات والتطبيقات	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية
فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان		
<p style="text-align: right;">تمرين 1:</p> <p>1) بين أن: $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2 \quad \sqrt{a+1} + \sqrt{a} > \sqrt{b+1} + \sqrt{b} \Rightarrow a > b$</p> <p>2) بين بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad n^3 - n + 5^{2n} - 1 = 6k$</p> <p>3) ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعاً، نضع: $x = a + \frac{1}{b}$ و $y = b + 1$ و $z = 1 + \frac{1}{a}$ وليكن M أكبر الأعداد x و y و z، بين أن: $M \geq 2$</p> <p>4) مستعملاً برهاننا بفصل الحالات برهن أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^6 - x + 1 > 0$</p> <p>5) بين أن: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x^2 + y^2 = x + y = 2 \Leftrightarrow x = y = 1)$</p> <p>6) إعط نفى العبارتين الوادتين في السؤال 1 و 2</p>		
<p>تمرين 2: لتكن E مجموعة غير فارغة و A و B و C أجزاء منها.</p> <p>1) بسط: $(A \cup C) \setminus (\overline{C \setminus B})$ ، $A \cup (A \cap C) \cup (\overline{B \cap A})$</p> <p>2) بين أن: $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$</p>		
<p>تمرين 3: نعتبر المجموعة: $K = \left\{ (a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \right\}$</p> <p>1) بين أن: $(a,b) \in K \Leftrightarrow (a-2)(b-2) = 4$</p> <p>2) اكتب المجموعة K بتفصيل</p>		
<p style="text-align: center;">$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$</p> <p>تمرين 4: نعتبر التطبيق: $x \mapsto \frac{x}{1+ x }$</p> <p>1) بين أن $f(\mathbb{R}) \subset]-1;1[$ ثم استنتج أن f غير شمولي.</p> <p>2) بين أن f تطبيق تبايني</p> <p>3) بين أن: $f^{-1}\left(\left[0; \frac{1}{2}\right]\right) = [0;1]$</p> <p>4) بين أن f تقابل من \mathbb{R} نحو $] -1;1[$ وحدد f^{-1} التطبيق العكسي لـ f</p>		

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	مبادئ في المنطق المجموعات والتطبيقات حل مقترح	استعدادا لاجتياز فروضك
------------------------------	-----------------------------------------------------	------------------------

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2 \quad a \leq b \Rightarrow \begin{cases} a+1 \leq b+1 \\ \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a+1} \leq \sqrt{b+1} \\ \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{a+1} + \sqrt{a} \leq \sqrt{b+1} + \sqrt{b} \quad \text{لدينا}$$

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2 \quad \sqrt{a+1} + \sqrt{a} > \sqrt{b+1} + \sqrt{b} \Rightarrow a > b \quad \text{بالتالي:}$$

1

لدينا بالنسبة لـ $n = 0$: $0^3 - 0 + 5^0 - 1 = 0 = 6 \times 0$ (العبارة صحيحة)

نفترض أن: $\exists k \in \mathbb{Z} \quad n^3 - n + 5^{2n} - 1 = 6k$ ونبين أن: $\exists k' \in \mathbb{Z} \quad (n+1)^3 - (n+1) + 5^{2(n+1)} - 1 = 6k'$

$$(n+1)^3 - (n+1) + 5^{2(n+1)} - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n^2 + 1 - n - 1 + 5^{2n+2} - 1 = n^3 - n + 3n(n+1) + 5^{2n} \times 25 - 1$$

$$= 6k - 5^{2n} + 1 + 3n(n+1) + 25 \times 5^{2n} - 1 \quad \text{لدينا:}$$

$$= 6k + 3n(n+1) + 24 \times 5^{2n}$$

2

وبما أن $n(n+1)$ عدد زوجي (جذاء عددين متتابعين) فإن: $n(n+1) = 2a$ / $a \in \mathbb{N}$

$$(n+1)^3 - (n+1) + 5^{2(n+1)} - 1 = 6k + 6a + 24 \times 5^{2n} = 6(k + a + 4 \times 5^{2n}) \quad \text{منه:}$$

نضع: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k' \in \mathbb{Z} \quad n^3 - n + 5^{2n} - 1 = 6k$ بالتالي: $k' = k + a + 4 \times 5^{2n} \in \mathbb{Z}$

نفترض أن: $M < 2$ ، إذن: $x < 2$ و $y < 2$ و $z < 2$

$$\begin{cases} x < 2 \\ y < 2 \\ z < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{1}{b} < 2 \\ b + 1 < 2 \\ 1 + \frac{1}{a} < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{1}{b} < 2 \\ b < 1 \\ \frac{1}{a} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{1}{b} < 2 \\ \frac{1}{b} > 1 \\ a > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{1}{b} < 2 \\ \frac{1}{b} + a > 2 \end{cases} \Rightarrow 2 < a + \frac{1}{b} < 2 \quad \text{منه:}$$

3

وهذا غير ممكن إذن افتراضنا خاطئ وبالتالي العبارة المطلوبة صحيحة.

لدينا: $x^6 - x + 1 = x^6 + 1 - x$ و $x^6 - x + 1 = x(x^5 - 1) + 1$

▪ إذا كان: $x \geq 1$ ، فإن: $x^5 - 1 \geq 0 \Rightarrow x(x^5 - 1) \geq 0 \Rightarrow x^6 - x + 1 > 0$ $x \geq 1 \Rightarrow x^5 \geq 1 \Rightarrow x^5 - 1 \geq 0$

▪ إذا كان: $x < 1$ ، فإن: $x^6 + 1 - x > 0$ $x < 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 - x > 0 \\ x^6 = (x^3)^2 \geq 0 \end{cases}$

4

إذن في كل الحالات: $x^6 - x + 1 > 0$ ، بالتالي: $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^6 - x + 1 > 0$

لدينا: $x = y = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 + 1 = 2 \\ x + y = 1 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = x + y = 2$

و $x^2 + y^2 = x + y = 2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 - 2(x+y) + 2 = 2 - 4 + 2 = 0$$

5

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 1$$

بالتالي: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x^2 + y^2 = x + y = 2 \Leftrightarrow x = y = 1)$

$$\exists (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2 \quad \sqrt{a+1} + \sqrt{a} > \sqrt{b+1} + \sqrt{b} \text{ et } a \leq b$$

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \exists \forall \in \mathbb{Z} \quad n^3 - n + 5^{2n} - 1 \neq 6k$$

6

تمرين 2 :

- لدينا $A \cup (A \cap C) \cup (\overline{B} \cap A) = A$ (لأن: $A \cap C \subset A$ وأيضا: $\overline{B} \cap A \subset A$)
- لدينا: $(A \cup C) \setminus (\overline{C} \setminus B) = (A \cup C) \cap (\overline{\overline{C} \setminus B}) = (A \cup C) \cap (C \setminus B) = (A \cup C) \cap (C \cap \overline{B}) = C \cap \overline{B}$
- لأن: $C \cap \overline{B} \subset C \subset (A \cup C)$

إذا كانت مجموعة ضمن الأخرى يكون التقاطع هو المجموعة الأصغر و الاتحاد هو المجموعة الأكبر

$$\text{تمرين 3 : نعتبر المجموعة: } K = \left\{ (a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \right\}$$

$$(a,b) \in K \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a+2b = ab \Leftrightarrow 2a - ab + 2b = 0$$

$$(a,b) \in K \Leftrightarrow a(2-b) + 2b = 0 \Leftrightarrow a(2-b) + 2b - 4 + 4 = 0 \Leftrightarrow a(2-b) + 2(b-2) = -4$$

$$(a,b) \in K \Leftrightarrow (b-2)(-a+2) = -4 \Leftrightarrow (b-2)(a-2) = 4$$

1

لدينا حسب السؤال السابق، و بما أن قواسم 4 الموجبة هي 1 و 2 و 4 فإن:

$$(a,b) \in K \Leftrightarrow (a-2, b-2) \in \{(1,4); (-1,-4); (2,2); (-2,-2)\} \Leftrightarrow (a,b) \in \{(3,6); (1,-2); (4,4); (0,0)\}$$

2

بالتالي: $K = \{(3,6); (1,-2); (4,4)\}$ (لأن $(0,0) \notin K$)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{1+|x|} \quad \text{تمرين 4 :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| < 1 \quad \text{إذن: } \forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - |f(x)| = 1 - \frac{|x|}{1+|x|} = \frac{1}{1+|x|} > 0$$

$$\text{منه: } f(\mathbb{R}) \subset]-1; 1[\quad \text{بالتالي: } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \in]-1; 1[$$

1

بما أن $]-1; 1[\neq \emptyset$ و $f(\mathbb{R}) \subset]-1; 1[$ فإن 2 لا سابق له بالتالي f ليس شمولاً على \mathbb{R}

$$\text{ليكن } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ حيث } f(x) = f(y) \text{ إذن: } \frac{x}{1+|x|} = \frac{y}{1+|y|} \text{ نستنتج أن لـ } x \text{ و } y \text{ نفس الإشارة}$$

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y} \Rightarrow x + xy = y + xy \Rightarrow x = y$$

2

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{y}{1-y} \Rightarrow x - xy = y - xy \Rightarrow x = y$$

بالتالي f تطبيق تبائي

$$x \in f^{-1}\left(\left[0; \frac{1}{2}\right]\right) \Leftrightarrow f(x) \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x}{1+|x|} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq 1+|x|$$

$$x \in f^{-1}\left(\left[0; \frac{1}{2}\right]\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ 2x \leq 1+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0; 1]$$

3

$$\text{بالتالي: } f^{-1}\left(\left[0; \frac{1}{2}\right]\right) = [0; 1]$$

لدينا حسب السؤال الثاني f تبين على IR

لنبين أنها شمول على $]-1;1[$ ، ليكن $y \in]-1;1[$ ، ولنحل المعادلة: $f(x) = y; x \in IR$ (E):

هذه المعادلة تكافئ: $\frac{x}{1+|x|} = y$ نستنتج منه أن x و y نفس الإشارة

إذا كان: $y \geq 0$ فإن: $x \geq 0$ منه:

$$(E): \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} = y \Leftrightarrow x = y + xy \Leftrightarrow x - xy = y \Leftrightarrow x(1-y) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y} \quad (y \neq 1)$$

إذا كان: $y < 0$ فإن: $x < 0$ منه:

$$(E): \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow x = y - xy \Leftrightarrow x + xy = y \Leftrightarrow x(1+y) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y} \quad (y \neq -1)$$

في كل الحالات المعادلة تقبل حلا في IR ، إذن f شمول على $]-1;1[$

وبالتالي فهي تقابل من IR نحو $]-1;1[$ وتقابلها العكسي معرف كما يلي:

$$f^{-1} :]-1;1[\rightarrow IR$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{1-x} ; 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{1+x} ; -1 < x < 0 \end{cases}$$