

**Durée : 02h30**

• التمرين رقم 01: (02 pts)

1- أكتب نفي العبارة :  $p : ((\forall x \in \mathbb{R}), x^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q})$  .

2- باستعمال الاستدلال بالمثل المضاد ، بين أن العبارة  $p$  خاطئة .

• التمرين رقم 02: (02 pts)

← حل في  $\mathbb{R}^2$  المعادلة :  $(E) : 2\sqrt{x-1} + 4\sqrt{y-4} = x + y$  .

• التمرين رقم 03: (02 pts)

تكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ، نضع :  $P(n) = n^2 + 7n + 12$  .

1- بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}), (n+3)^2 < P(n) < (n+4)^2$  .

2- باستعمال الاستدلال بالخلف ، بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}), \sqrt{P(n)} \notin \mathbb{N}$  .

• التمرين رقم 04: (02 pts)

← بين أن :  $(\forall x \in \mathbb{R}), x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4} > 0$  .

(يمكنك الاستدلال بفصل الحالات ، ودراسة حالة :  $x \leq 0$  و  $x \geq 1$  و  $0 < x < 1$  ) .

• التمرين رقم 05: (03 pts)

تكن  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  أعدادا حقيقية موجبة قطعاً و مختلفة فيما بينها مثلي مثلي .

← بين أن :  $ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$  ، ثم استنتج أن :  $abcd < \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$  .

• التمرين رقم 06: (03 pts)

1- بين أن :  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (1 < x + y \leq \sqrt{2})$  .

2- استنتج أن :  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{-*})^2, x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (-\sqrt{2} \leq x + y < -1)$  .

• التمرين رقم 07: (03 pts)

يكن  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  .

1- بين أنه إذا كان  $n$  فردياً ، فإن  $n = 4k + r$  حيث  $k \in \mathbb{N}$  و  $r \in \{1; 3\}$  .

2- باستعمال الاستدلال بمضاد العكس ، بين أن :  $(n$  عدد زوجي)  $\Rightarrow (n^2 - 1)$  لا يقبل القسمة على 8 .

• التمرين رقم 08: (03 pts)

1- بين بالترجع أنه تكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ،  $n(n^2 + 5)$  يقبل القسمة على 6 .

2- بين بالترجع أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \sum_{k=1}^n k \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4 \times 5^{n+1} - (5+n)4^{n+1}}{5^n}$  .

• التمرين رقم 01:

1- إذا كانت  $s$  و  $t$  عبارتين ، فإن :  $\neg(s \Rightarrow t) \Leftrightarrow (s \wedge \neg t)$ .

إذن نفي العبارة :  $p : ((\forall x \in \mathbb{R}), x^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q})$  هي العبارة :

$$\neg p : ((\exists x \in \mathbb{R}) / x^2 \in \mathbb{Q} \wedge x \notin \mathbb{Q})$$

2- نبين أن  $\neg p$  عبارة صحيحة .

نأخذ  $x = \sqrt{2}$  لدينا :  $x^2 = 2 \in \mathbb{Q}$  و نعلم أن  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  ، إذن  $\neg p$  عبارة صحيحة .

و بالتالي فإن  $p$  عبارة خاطئة .

• التمرين رقم 02: (02 pts)

← تكون المعادلة (E) معرفة إذا كان  $x \in [1; +\infty[$  و  $y \in [4; +\infty[$  .

و في هذه الحالة ، لدينا :

$$(E) \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x-1} + y - 4\sqrt{y-4} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1 + y - 4 - 4\sqrt{y-4} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1})^2 - 2\sqrt{x-1} + 1^2 + (\sqrt{y-4})^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{y-4} + 2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 1)^2 + (\sqrt{y-4} - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} - 1 = 0 \\ \sqrt{y-4} - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases}$$

و بالتالي ، فإن :  $S = \{(2; 8)\}$  .

• التمرين رقم 03:

نكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ، نضع :  $P(n) = n^2 + 7n + 12$  .

1- نكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ، لدينا :

$$\begin{aligned} (n+4)^2 - P(n) &= (n^2 + 8n + 16) - (n^2 + 7n + 12) \\ &= n + 4 \geq 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(n) - (n+3)^2 &= (n^2 + 7n + 12) - (n^2 + 6n + 9) \\ &= n + 3 \geq 3 \end{aligned}$$

← إذن :  $(\forall n \in \mathbb{N}), (n+4)^2 > P(n)$  و  $(\forall n \in \mathbb{N}), P(n) > (n+3)^2$

و بالتالي ، فإن :  $(\forall n \in \mathbb{N}), (n+3)^2 < P(n) < (n+4)^2$  .

2- نبين بالخلف أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}), \sqrt{P(n)} \notin \mathbb{N}$  .

← نفترض أنه :  $(\exists n \in \mathbb{N}), \sqrt{P(n)} \in \mathbb{N}$

إذن :  $(\exists a \in \mathbb{N}) / \sqrt{P(n)} = a$  ، بمعنى أنه :  $(\exists a \in \mathbb{N}) / P(n) = a^2$

و باستعمال نتيجة السؤال 1- نستنتج أنه :  $(\exists a \in \mathbb{N}) / (n+3)^2 < a^2 < (n+4)^2$

و هذا تناقض ، لأنه لا يوجد مربع كامل بين المربعين المتتابعين  $(n+3)^2$  و  $(n+4)^2$  . إذن إفتراضنا خاطيء

و بالتالي فإن :  $(\forall n \in \mathbb{N}), \sqrt{P(n)} \notin \mathbb{N}$  .

#### • التمرين رقم 04:

← نبين بفصل الحالات :  $x \leq 0$  و  $x \geq 1$  و  $0 < x < 1$  أن :

$$. (\forall x \in \mathbb{R}), x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4} > 0$$

تكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ، نضع :  $P(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4}$

← في حالة  $x \leq 0$  ، لدينا :

$$x^6 + x^4 + x^2 \geq 0 \text{ و } -(x^5 + x^3 + x) \geq 0 \text{ (لأن : } x^5 + x^3 + x \leq 0)$$

$$\text{إذن : } x^6 + x^4 + x^2 - (x^5 + x^3 + x) \geq 0$$

$$\text{و منه فإن : } (\forall x \in \mathbb{R}^-), P(x) \geq \frac{3}{4}$$

← في حالة  $x \geq 1$  ، لدينا :

$$x^6 - x^5 = x^5(x-1) \geq 0 \text{ و } x^4 - x^3 = x^3(x-1) \geq 0 \text{ و } x^2 - x = x(x-1) \geq 0$$

$$\text{إذن : } (\forall x \in [1; +\infty[), P(x) \geq \frac{3}{4}$$

← و في حالة  $0 < x < 1$  ، لدينا :

$$P(x) = \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \left(x^6 - x^3 + \frac{1}{4}\right) + (x^4 - x^5) + \frac{1}{4}$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 + x^4(1-x) + \frac{1}{4}$$

$$\text{و بما أن : } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ و } \left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ و } x^4(1-x) > 0 \text{ ، فإن : } (\forall x \in ]0; 1[), P(x) > \frac{1}{4}$$

$$\text{إذن : } (\forall x \in \mathbb{R}), P(x) > \frac{1}{4} \text{ ، و بالتالي فإن : } (\forall x \in \mathbb{R}), P(x) > 0$$

#### • التمرين رقم 05:

← تكل  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}^{*+}$  ، لدينا :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{4} = \frac{(a-b)^2}{4}$$

$$\text{و بما أن } a \neq b \text{ ، فإن : } (a-b)^2 > 0 \text{ . إذن : } ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

← استنتاج :

إذا كانت  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  أعدادا حقيقية موجبة قطعاً و مختلفة فيما بينها مثني مثني ، فإن :

$$. cd < \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 \text{ و } ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

و بضرب طرفي المتفاوتتين السابقتين ، نحصل على :  $abcd < \frac{[(a+b) \times (c+d)]^2}{4}$

$$(a+b) \times (c+d) \leq \left(\frac{(a+b) + (c+d)}{2}\right)^2 \text{ : و بما أن :}$$

$$. abcd < \frac{[(a+b) \times (c+d)]^2}{4} \leq \frac{1}{4^2} \left(\frac{(a+b) + (c+d)}{2}\right)^4 \text{ : فإن :}$$

و بذلك يتحقق المطلوب .

• التمرين رقم 06:

(1)- تكن  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}^{*+}$  بحيث  $x^2 + y^2 = 1$  ، لدينا :

$$(x+y)^2 - 2 = (x+y)^2 - 2(x^2 + y^2) = -(x-y)^2 \leq 0$$

$$. x+y \leq \sqrt{2} \text{ : إذن : } (x+y)^2 \leq 2 \text{ ، بمعنى أن :}$$

← و من جهة أخرى :

لدينا :  $(y^2 < x^2 + y^2 = 1) \Rightarrow 0 < y < 1$  و  $(x^2 < x^2 + y^2 = 1) \Rightarrow 0 < x < 1$

$$(x+y) - 1 = (x+y) - (x^2 + y^2) = x(1-x) + y(1-y)$$

$$. (x+y) - 1 > 0 \text{ : فإن :}$$

$$. \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{*+})^2 ; x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (1 < x+y \leq \sqrt{2}) \text{ : إذن :}$$

(2)- ليكن  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}^{*-}$  بحيث  $x^2 + y^2 = 1$  .

$$(-x)^2 + (-y)^2 = x^2 + y^2 = 1 \text{ و } -y \in \mathbb{R}^{*+} \text{ و } -x \in \mathbb{R}^{*+}$$

$$1 < (-x) + (-y) \leq \sqrt{2} \text{ : فإن :}$$

$$. -\sqrt{2} \leq x+y < -1 \text{ : إذن :}$$

• التمرين رقم 07:

(1)- ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  و  $n$  عدد فردي .

$$. n = 4k + r \text{ : نعلم أنه يوجد } k \in \mathbb{N} \text{ و } r \in \{0;1;2;3\} \text{ بحيث :}$$

و بما أن  $n$  فردي فإن  $r \notin \{0;2\}$  ( إذ لو كان  $r \in \{0;2\}$  فكان  $n$  زوجياً و هذا غير ممكن )

$$. r \in \{1;3\} \text{ و } k \in \mathbb{N} \text{ حيث } n = 4k + r \text{ : إذن :}$$

(2)- للبرهان بمضاد العكس على أن :

$$(n \text{ عدد زوجي}) \Rightarrow (n^2 - 1 \text{ لا يقبل القسمة على } 8)$$

$$. \text{ نبين أن : } (n^2 - 1 \text{ يقبل القسمة على } 8) \Rightarrow (n \text{ عدد فردي}) .$$

← إذا كان  $n$  عددا فرديا ، فإن :  $n = 4k + r$  حيث  $k \in \mathbb{N}$  و  $r \in \{1;3\}$  في حالة  $r = 1$  ، لدينا :

$$n^2 - 1 = (4k + 1)^2 - 1 = 4k \times (4k + 2) = 8k(2k + 1)$$

إذن  $n^2 - 1$  يقبل القسمة على 8 .

و في حالة  $r = 3$  ، لدينا :

$$n^2 - 1 = (4k + 3)^2 - 1 = (4k + 2) \times (4k + 4) = 8(k + 1)(2k + 1)$$

إذن  $n^2 - 1$  يقبل القسمة على 8 .

و بالتالي ، فإن :  $(n^2 - 1)$  يقبل القسمة على 8  $\Rightarrow$  ( $n$  عدد فردي) .

• التمرين رقم 08:

1- نبين بالترجع أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}), \frac{n(n^2 + 5)}{6} \in \mathbb{N}$  .

← بالنسبة ل  $n = 0$  ، لدينا :  $\frac{0 \times (0^2 + 5)}{6} = 0 \in \mathbb{N}$  .

← ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  بحيث  $\frac{n(n^2 + 5)}{6} \in \mathbb{N}$  (إفترض التراجع) ، لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)[(n+1)^2 + 5]}{6} &= \frac{(n+1)[(n^2 + 5) + (2n+1)]}{6} \\ &= \frac{n(n^2 + 5) + [(n^2 + 5) + (n+1)(2n+1)]}{6} \end{aligned}$$

$$= \frac{n(n^2 + 5)}{6} + \frac{3n^2 + 3n + 6}{6}$$

$$= \frac{n(n^2 + 5)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

و بما أن :  $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$  و  $\frac{n(n^2 + 5)}{6} \in \mathbb{N}$  (حسب إفترض التراجع)

$$\frac{(n+1)[(n+1)^2 + 5]}{6} \in \mathbb{N} \text{ : فإن}$$

و بالتالي فإن :  $(\forall n \in \mathbb{N}), \frac{n(n^2 + 5)}{6} \in \mathbb{N}$  .

2- نبين الآن بالترجع أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \sum_{k=1}^n k \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4 \times 5^{n+1} - (5+n)4^{n+1}}{5^n}$  .

← من أجل  $n = 1$  ، لدينا :  $\frac{4 \times 5^{1+1} - (5+1)4^{1+1}}{5^1} = \frac{100 - 96}{5} = \frac{4}{5}$  و  $\sum_{k=1}^1 k \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4}{5}$

إذن العلاقة السابقة محققة من أجل  $n = 1$  .

← نفترض أن :  $\sum_{k=1}^n k \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4 \times 5^{n+1} - (5+n)4^{n+1}}{5^n}$  حيث  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ .

و لنبين أن :  $\sum_{k=1}^{n+1} k \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4 \times 5^{(n+1)+1} - (5+(n+1))4^{(n+1)+1}}{5^{n+1}}$  . (؟؟؟؟)

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \left(\frac{4}{5}\right)^k = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{4}{5}\right)^k + (n+1) \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} : \text{لدينا}$$

و باستعمال افتراض التراجع ، نحصل على :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4 \times 5^{n+1} - (5+n)4^{n+1}}{5^n} + (n+1) \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

إذن :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k \left(\frac{4}{5}\right)^k &= \frac{5[4 \times 5^{n+1} - (5+n)4^{n+1}] + (n+1)4^{n+1}}{5^{n+1}} \\ &= \frac{4 \times 5^{(n+1)+1} + [(n+1) - 5(5+n)]4^{n+1}}{5^{n+1}} \\ &= \frac{4 \times 5^{(n+1)+1} - (24 + 4n)4^{n+1}}{5^{n+1}} \\ &= \frac{4 \times 5^{(n+1)+1} - (6+n)4^{(n+1)+1}}{5^{n+1}} \\ &= \frac{4 \times 5^{(n+1)+1} - (5+(n+1))4^{(n+1)+1}}{5^{n+1}} \end{aligned}$$

و بالتالي فإب :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \sum_{k=1}^n k \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4 \times 5^{n+1} - (5+n)4^{n+1}}{5^n}$