

تمرين (1)

نعتبر العبارتين: $P : (\forall x \in \mathbb{R}^*) (\exists n \in \mathbb{N}) \quad nx > 1$

$$Q : \left[(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left| x \right| < \frac{1}{n} \right] \Rightarrow x = 0$$

(1) حدد نفي كل من العبارتين P و Q

(2) نضع $p = E\left(\frac{1}{x}\right)$ بين أن العبارة P صحيحة

تمرين (2)

(1) بين أن $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad (x > 2 \text{ و } y > 2) \Rightarrow (xy > x + y)$

(2) بالمضاد للعكس بين أن $(\forall x > 2)(\forall y > 2) \quad (x \neq y) \Rightarrow (x\sqrt{y-1} \neq y\sqrt{x-1})$

تمرين (3)

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k+1}{3^k} = \frac{1}{4} \left(5 - \frac{2n+5}{3^n} \right) \quad (1)$$

باستعمال برهان بالترجع بين أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k+1} k = n+1 \quad (2)$$

تمرين (3)

ليكن a, b عددين بحيث $0 < a < b$.

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي: $U_0 = \frac{a+b}{2}$ و $U_{n+1} = \frac{ab}{a+b-U_n}$

(1) أحسب U_1 و بين أن $a < U_n < b$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

(2) بين أن $(U_n)_n$ متتالية تناقصية

(3) نضع $V_n = \frac{U_n - a}{U_n - b}$ لكل عدد طبيعي n

(أ) بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{a}{b}$

(ب) بين أن $U_n = \frac{ab^n + ba^n}{a^n + b^n}$

تمرين (4)

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ بحيث: $U_0 = 2$ و $U_1 = 1$ و $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 6U_n$

(1) أحسب U_2 و U_3

(2) نضع $V_n = U_{n+1} - 3U_n$

بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية محددًا أساسها

و بما أن $xy > x+y$ فإن $xy - x - y \neq 0$ وعليه $x = y$ وبالتالي فإن

$$(\forall x)(\forall y) : [x \neq y \Rightarrow x\sqrt{y-1} \neq y\sqrt{x-1}]$$

التمرين 3

(1) يبين بالترجع أن

$$(\forall m \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^{k=m} \frac{k+1}{3^k} = \frac{1}{4} \left(5 - \frac{2m+5}{3^m} \right)$$

من أجل $m=0$ لدينا

$$\frac{1+1}{3^0} = \frac{2}{3}$$

و

$$\frac{1}{4} \left(5 - \frac{2 \cdot 1 + 5}{3^1} \right) = \frac{2}{3}$$

علاقة صحيحة

نفترض أن:

$$\sum_{k=1}^{k=m} \frac{k+1}{3^k} = \frac{1}{4} \left(5 - \frac{2m+5}{3^m} \right)$$

ونثبت أن:

$$\sum_{k=1}^{k=m+1} \frac{k+1}{3^k} = \frac{1}{4} \left(5 - \frac{2(m+1)+5}{3^{m+1}} \right)$$

لدينا

$$\sum_{k=1}^{k=m+1} \frac{k+1}{3^k} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{k+1}{3^k} + \frac{m+2}{3^{m+1}}$$

$$= \frac{1}{4} \left(5 - \frac{2m+5}{3^m} \right) + \frac{m+2}{3^{m+1}}$$

$$= \frac{1}{4} \left(5 - \frac{2m+5}{3^m} + \frac{4m+8}{3^{m+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(5 - \frac{6m+15+4m-8}{3^{m+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(5 - \frac{2m+7}{3^{m+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(5 - \frac{2(m+1)+5}{3^{m+1}} \right)$$

وحسب مبدأ التراجع فإن:

$$(\forall m \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^{k=m} \frac{k+1}{3^k} = \frac{1}{4} \left(5 - \frac{2m+5}{3^m} \right)$$

(2) يبين بالترجع أن:

$$(\forall m \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^{k=2m+1} (-1)^{k+1} k = m+1$$

من أجل $m=1$ لدينا

$$\sum_{k=1}^{k=3} (-1)^{k+1} k = 1 - 2 + 3 = 2 = 1 + 1$$

علاقة صحيحة

تصحيح الفروض المحروسة رقم 3

التمرين 1

(1) لدينا $P : (\forall x \in \mathbb{R}^*) (\exists m \in \mathbb{N}) mx > 1$

إذن $\bar{P} : (\exists x \in \mathbb{R}^*) (\forall m \in \mathbb{N}) mx \leq 1$

ولدينا $Q : [(\forall m \in \mathbb{N}^*) |x| < \frac{1}{m}] \Rightarrow x = 0$

- نفي العبارة Q:

نعلم أن نفي الاستلزام $a \Rightarrow b$ هي العبارة $a \wedge \bar{b}$ ومنه فإن:

$\bar{Q} : (\exists m \in \mathbb{N}^*) |x| < \frac{1}{m} \wedge x \neq 0$

(2) $P : (\forall x \in \mathbb{R}^*) (\exists m \in \mathbb{N}) mx > 1$

لنثبت أن P صحيحة

$$mx > 1 \Leftrightarrow m > \frac{1}{x}$$

ونعلم أن $E\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right) + 1$

نضع $P = E\left(\frac{1}{x}\right)$ عدد طبيعي لأن $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}^*$

ومنه $m = P + 1$ نضع: $P < \frac{1}{x} < P + 1$

$$\frac{1}{x} < m$$

إذن $(\exists m = P + 1 \in \mathbb{N}) mx > 1$

التمرين 2

(1) يبين أن $(x > 1 \wedge y > 1) \Rightarrow (x-1)(y-1) > 1$

$$(x > 1 \wedge y > 1) \Rightarrow (x-1) > 1 \wedge (y-1) > 1$$

$$\Rightarrow (x-1)(y-1) > 1$$

$$\Rightarrow 1 + xy - x - y > 1$$

$$\Rightarrow xy > x + y$$

(2) يبين بالعكس:

$(x > 1 \wedge y > 1) : (x+y) \Rightarrow (x\sqrt{y-1} \neq y\sqrt{x-1})$

أي نثبت أن

$$(\forall x)(\forall y) : (x\sqrt{y-1} = y\sqrt{x-1}) \Rightarrow (x=y)$$

$$x\sqrt{y-1} = y\sqrt{x-1} \Rightarrow x^2(y-1) = y^2(x-1)$$

$$\Rightarrow x^2y - x^2 - y^2x + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow xy(x-y) - (x-y)(x+y) = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)(xy - x - y) = 0$$

٢) نبي أن $(u_m)_m$ متتالية تناقصية:

يعني نبي أن $u_{m+1} < u_m$

$$u_{m+1} - u_m = \frac{ab}{a+b-u_m} - u_m$$

$$= \frac{ab - a u_m - b u_m + u_m^2}{a+b-u_m}$$

$$= \frac{a(b-u_m) - u_m(b-u_m)}{a+b-u_m}$$

$$= \frac{(b-u_m)(a-u_m)}{a+b-u_m}$$

ولدينا $a < u_m < b$

يعني $-b < -u_m < -a$

$$a - u_m < 0 \quad , \quad b - u_m > 0$$

وبما أن $0 < a < a+b-u_m < b$

$$\frac{(b-u_m)(a-u_m)}{a+b-u_m} < 0 \quad \text{فإن}$$

بأن $u_{m+1} < u_m$

ومنه فإن $(u_m)_m$ متتالية تناقصية

٣) ١- نبي أن $(v_m)_m$ متتالية هندسية أساسها $\frac{a}{b}$:

$$v_{m+1} = \frac{u_{m+1} - a}{u_{m+1} - b}$$

$$= \frac{\frac{ab}{a+b-u_m} - a}{\frac{ab}{a+b-u_m} - b}$$

$$= \frac{ab - a^2 - ab + a u_m}{ab - ab - b^2 + b u_m}$$

$$= \frac{a(a-u_m)}{b(b-u_m)}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{u_m - a}{u_m - b}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot v_m$$

٢- نبي أن $(v_m)_m$ متتالية هندسية أساسها $\frac{a}{b}$:

نفترض أن

ونبي أن

$$\sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} k = m+1$$

$$\sum_{k=1}^{m+2} (-1)^{k+1} k = m+2$$

$$\sum_{k=1}^{m+3} (-1)^{k+1} k = \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} k + (-1)^{m+3} (m+2) + (-1)^{m+4} (m+3)$$

$$= m+1 - (m+2) + (m+3)$$

$$= m+1 - m - 2 + m + 3$$

$$= m+2$$

وبالتالي فإن

$$(\forall m \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} k = m+1$$

التمرين (4):

١) احسب u_1 وبي أن $a < u_m < b$ ($\forall m \in \mathbb{N}$)

$$u_1 = \frac{ab}{a+b-u_0}$$

$$= \frac{ab}{a+b-\frac{a+b}{2}}$$

$$= \frac{2ab}{2a+2b-a-b}$$

$$u_1 = \frac{2ab}{a+b}$$

من أجل $m=0$ صحيحة $a < u_0 = \frac{a+b}{2} < b$

$$a < u_m < b$$

$$a < u_{m+1} < b$$

$$a < u_m < b$$

$$-b < -u_m < -a$$

$$a < a+b-u_m < b$$

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a+b-u_m} < \frac{1}{a}$$

$$a < \frac{ab}{a+b-u_m} < b$$

$$a < u_{m+1} < b$$

وحسب مبدأ التراجع

$$a < u_m < b$$

فإن

٤) بين أن (V_m) متتالية هندسية معدداً أساساً

$$V_m = u_{m+1} - 3u_m$$

$$V_{m+1} = u_{m+2} - 3u_{m+1} \quad \text{لدينا}$$

$$= 5u_{m+1} - 6u_m - 3u_{m+1}$$

$$= 2u_{m+1} - 6u_m$$

$$= 2(u_{m+1} - 3u_m)$$

$$= 2 \cdot V_m$$

٩ = ٢ سازن (V_m) متتالية هندسية أساساً

من إحصان التلميذ ياسر السيارى

التصريب 4

$$V_m = \frac{u_m - a}{u_m - b}$$

٣) ب - لدينا

$$V_m u_m - b V_m = u_m - a$$

$$V_m u_m - u_m = b V_m - a$$

$$u_m (V_m - 1) = b V_m - a$$

$$u_m = \frac{b V_m - a}{V_m - 1}$$

وعلا أن (V_m) متتالية هندسية

أساساً $q = \frac{a}{b}$ و $V_0 = -1$

$$V_m = V_0 q^m \quad \text{فإن}$$

$$V_m = -\left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$u_m = \frac{-b \left(\frac{a}{b}\right)^m - a}{-\left(\frac{a}{b}\right)^m - 1} \quad \text{وعليه}$$

$$= \frac{-a^m b - ab^m}{-a^m - b^m}$$

$$= \frac{a^m b + ab^m}{a^m + b^m}$$

$$= \frac{a^m b + ab^m}{a^m + b^m}$$

$$= \frac{a^m b + ab^m}{a^m + b^m}$$

$$u_m = \frac{ab^m + ba^m}{a^m + b^m}$$

ب - لنبين أن

$$u_0 = \frac{a \cdot b^0 + b \cdot a^0}{a^0 + b^0} \quad \text{من أجل}$$

$$u_0 = \frac{a+b}{2} \quad \text{لدينا}$$

$$u_m = \frac{ab^m + ba^m}{a^m + b^m}$$

نفترض أن

$$u_{m+1} = \frac{ab^{m+1} + ba^{m+1}}{a^{m+1} + b^{m+1}}$$

ونبين أن

$$u_{m+1} = \frac{ab}{a+b - u_m} \quad \text{لدينا}$$

$$= \frac{ab}{a+b - \frac{ab^m + ba^m}{a^m + b^m}}$$

$$= \frac{ab}{\frac{(a+b)(a^m + b^m) - ab^m - ba^m}{a^m + b^m}}$$

$$= \frac{ab(a^m + b^m)}{a \cdot a^m + ab^m + ba^m + b \cdot b^m - ab^m - ba^m}$$

$$= \frac{b \cdot a^{m+1} + a b^{m+1}}{a^{m+1} + b^{m+1}}$$

$$u_m = \frac{ab^m + ba^m}{a^m + b^m} \quad \text{وحسب مبدأ التراجع فإن}$$

التصريب 5

١) احسب u_2 و u_3

$$u_2 = 5u_1 - 6u_0 \quad \text{لدينا}$$

$$= 5 \times 1 - 6 \times 2$$

$$= 5 - 12$$

$$u_2 = -7$$

$$u_3 = 5u_2 - 6u_1$$

$$= 5 \times (-7) - 6 \times 1$$

$$= -35 - 6$$

$$u_3 = -41$$