

التمرين الأول : (متتالية عددية)

ليكن a من $]0, +\infty[$ و نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ بحيث : $U_0 = \frac{a}{2}$ و $U_{n+1} = \frac{a^2}{2a - U_n}$

$$(1) \text{ أ-- تحقق أن } U_{n+1} - a = \frac{a(U_n - a)}{a + (a - U_n)} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

ب-- بين بالترجع أن $U_n < a$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

(2) بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

$$(3) \text{ نضع } V_n = \frac{a}{a - U_n} \text{ لكل عدد طبيعي } n$$

أ-- بين أن $(V_n)_n$ متتالية حسابية محددًا أساسها ثم أحسب U_n بدلالة n

$$\text{ب-- حدد بدلالة } n \text{ الجمع } S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a - U_k}$$

التمرين الثاني (دراسة دالة عددية)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب : $f(x) = x \left(\frac{x-2}{x-1} \right)^2$

(1) أ-- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

ب-- أحسب نهايات الدالة f عند محددات D_f

$$(2) \text{ أ-- حدد العددين } a ; b \text{ بحيث : } f(x) = ax + b - \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

ب-- استنتج أن المستقيم $y = x - 2$ (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ج-- أدرس الوضع النسبي ل (C_f) و المقارب المائل

$$(3) \text{ أ-- بين } (\forall x \in D_f) \quad f'(x) = \frac{(x-2)(x^2 - x + 2)}{(x-1)^3}$$

ب-- أنجز جدول تغيرات الدالة f

ج-- أعط معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة 3

$$(4) \text{ أ-- بين أن } (\forall x \in D_f) \quad f''(x) = \frac{2(4-x)}{(x-1)^4}$$

$$\text{(لاحظ أن } (\forall x \in D_f) \quad f(x) = x - 2 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \text{)}$$

ب-- بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف محددًا إحداثياتها

(5) أ-- أنشئ المنحنى (C_f)

ب-- حدد مبيانيا و حسب قيم البارامتر m عدد حلول المعادلة : $f(x) = x + m$