

فرض محروس 4

التمرين الأول : (7 نقط)

نعتبر الدالة العددية للمتغير f الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x^2 - 1|} + 1}$

(1) أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أعط تأويل هندسي للنتيجة (0.5 ن)

(2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين و على يسار النقطة $x_0 = 1$ (1 ن)

(3) أ- بين أن $(\forall x \in]1, +\infty[) : f'(x) = \frac{x^2 - 2}{\sqrt{x^2 - 1}(\sqrt{x^2 - 1} + 1)^3}$ (0.5 ن)

ب- أحسب المشتقة $f'(x)$ من أجل x تنتمي إلى المجال $]0, 1[$ (0.5 ن)

ج- بين أن f تزايدية على $]0, 1[$ و أدرس منحى تغيرات الدالة f على $]1, +\infty[$ ثم أنجز جدول تغيراتها (1 ن)

(4) بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}^+) 0 \leq f(x) \leq x$ (0.5 ن)

(5) أرسم المنحنى (C_f) للدالة f (1 ن)

(6) لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة بما يلي : $U_0 = \frac{3}{4}$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 < U_n < 1$ (0.5 ن)

ب- أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_n$ (0.5 ن)

ج- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+1} \leq \frac{2}{3} U_n$ ثم أثبت أن $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n \leq \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ (1 ن)

التمرين الثاني : (3 نقط و نصف)

(1) أ- تحقق أن الزوج (3,4) حل للمعادلة $E : 3x - 2y = 1$ ثم حدد مجموعة حلول المعادلة (E) (0.5 ن)

ب- بين أن $(14n + 3) \wedge (21n + 4) = 1$ (0.5 ن)

(2) نضع $d = (21n + 4) \wedge (2n + 1)$

أ- بين أن $d = 1$ أو $d = 13$ (0.5 ن)

ب- حدد n كي يكون $d = 13$ (0.75 ن)

(3) ليكن n عدد صحيح طبيعي بحيث $n \geq 2$ نعتبر العددين $a = 21n^2 - 17n - 4$ و $b = 2n^2 - n - 1$

أ- تحقق أن $(n-1)/a$ و $(n-1)/b$ (0.25 ن)

ب- حدد تبعا لقيم n القاسم المشترك $\delta = a \wedge b$ (1 ن)

التمرين الثالث : (4 نقط و نصف)

الفضاء (\mathcal{E}) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

I- نعتبر النقط $A(a, 0, 0)$ ، $B(0, b, 0)$ و $C(0, 0, c)$ حيث $a ; b ; c$ أعداد حقيقية غير منعدمة

(1) أ- تحقق أن $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = bc\vec{i} + ac\vec{j} + ab\vec{k}$ (0.5 ن)

ب- استنتج أن النقط $A ; B ; C$ غير مستقيمية (0.25 ن)

ج- أعط معادلة للمستوى (ABC) (0.75 ن)

(2) لتكن (S) الفلكة التي مركزها O و شعاعها r

بين أن (ABC) مماس للفلكة (S) إذا و فقط إذا كان $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ (1 ن)

II- لتكن النقطة $B(0, 2, 0)$ و النقطتين $M ; M'$ بحيث $\overline{OM} = \alpha\vec{k}$ و $\overline{BM'} = \beta\vec{i}$

و نعتبر الفلكة (S') التي أحد أقطارها $[OB]$

(1) أعط تمثيل برامتري للمستقيم (MM') (0.75 ن)

(2) أثبت أن (MM') مماس للفلكة (S') إذا و فقط إذا كان $|\alpha\beta| = 2$ (1.25 ن)