فرض محروس رقم 1

التمرين رقم 1
التمرين رقم

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f\left(x\right)=\dfrac{\left(x+1\right)^2}{x^2+1}$

حدد مجموعة تعريف الدالة f و بين أنها تقبل قيمة قصوى في النقطة $a=1$

التمرين رقم 2
التمرين رقم

نعتبر الدالتين g و h بحيث : $g\left(x\right)=\dfrac{2x}{x-1}$ و $h\left(x\right)=x^2-2x$

1) ضع جدول التغيرات لكل من g و h

2) أرسم و في نفس المعلم المنحنيين $\left(C_h'\right)$, $\left(C_g\right)$

(نعطي $g\left(3\right)=h\left(3\right)=3$ و $g\left(0\right)=h\left(0\right)=0$)

3) حل مبيانيا المتراجحة : $\left(x-1\right)^2\leq\dfrac{3x-1}{x-1}$

4) نضع $f\left(x\right)=\dfrac{4x}{\left(x-1\right)^2}$

أ- تحقق أنّ $\left(h\circ g\right)\left(x\right)=f\left(x\right)$

ب- حدد $g\left(\left[2,3\right]\right)$ و أدرس رتابة الدالة f على المجال $\left[2,3\right]$

ج- بين أنّ الدالة f تزايدية على المجال $\left[-1,0\right]$

التمرين الثالث
التمرين الثالث

1) نعتبر العبارتين :

P_1 : " $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\quad x+\dfrac{1}{x}\geq 2$ أو $x\leq 0$ "

P_2 : " $\left(\exists x\in\mathbb{R}\right)\quad x^2\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$ "

أ) حدد نفي كل من العباريتين P_1 و P_2

ب) حدد الإستلزام المضاد للعكس للإستلزام P_2

2) بين بالترجع أنّ :

أ) $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\quad 1+5+9+\ldots\ldots+\left(4n-3\right)=n\left(2n-1\right)$

ب) $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\quad -1+2-3+4+\ldots\ldots+\left(-1\right)^n n=\dfrac{-1+\left(-1\right)^n\left(2n+1\right)}{4}$

تصحيح فرض محروس رقم 1

التمرين 1 :

لدينا
$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2+1 \neq 0\}$$

أي
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 \neq -1\}$$
هذا محقق

إذن $D_f = \mathbb{R}$

* لنبين أن $f(x)$ تقبل قيمة قصوى في $a=1$

لدينا :
$$f(x) - f(1) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} - 2$$

يعني
$$= \frac{x^2+2x+1-2x^2-2}{x^2+1}$$

يعني
$$= \frac{-x^2+2x-1}{x^2+1}$$

إذن
$$f(x) - f(1) = \frac{-(x-1)^2}{x^2+1}$$

لدينا $(x+1)^2 > 0$ إذن $-(x+1)^2 < 0$

و $x^2+1 > 0$

إذن $f(x) - f(1) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(1)$

وبالتالي الدالة f تقبل قيمة قصوى في $a=1$.

التمرين 2 :

$$g(x) = \frac{2x}{x-1} \quad \text{و} \quad h(x) = x^2 - 2x$$

لدينا $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 < 0$

لدينا $a>0$ / $h(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

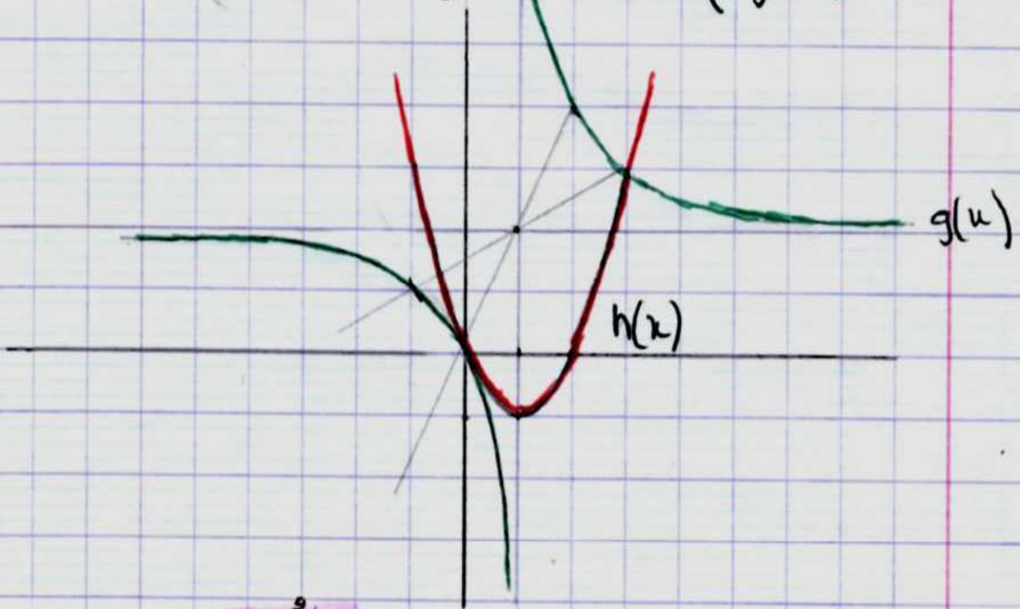
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

من إنجاز: خديجة العزابي

2 - رسم المنحنيين (C_g) و (C_h)

1 - (C_g) عبارة عن هذلول مركز تناظره $\Omega(1;2)$ و مقارباه هما $x=1$ و $y=2$

2 - لدينا h دالة حدودية إذن (C_h) عبارة عن شلجم رأسه $\Omega'(1;-1)$ و محور تناظره $x=1$



3 - حل مبيانيا المتراجحة $(x-1)^2 \leq \frac{3x-1}{x-1}$

لدينا $(x-1)^2 \leq \frac{3x-1}{x-1}$ يعني $x^2-2x+1 \leq \frac{3x-1}{x-1}$

يعني $x^2-2x \leq \frac{3x-1}{x-1}-1$ أي $x^2-2x \leq \frac{2x}{x-1}$ أي $h(x) \leq g(x)$

وحسب الشكل نجد $S =]1,3]$.

- 4

أ - لدينا $(h\circ g)(x) = (g(x))^2 - 2(g(x))$

$$= \frac{4x^2}{(x-1)^2} - \frac{4x}{x-1}$$

$$(h\circ g)(x) = \frac{4x}{(x-1)^2}$$

أي أن $(h\circ g)(x) = f(x)$

ب - لنحدد $g([2,3])$

لدينا $g(x)$ تناقصية على المجال $[2,3]$ (g دالة مرجعية)

إذن $g([2,3]) = [g(3), g(2)]$

$$g([2,3]) = [3;4]$$

* لندرس رتابة الدالة f على المجال $[2,3]$

لدينا g تناقصية على المجال $[2,3]$

و h تزايدية على $[3,4]$

إذن f تناقصية على المجال $[2,3]$.

ج - لنبين أن f تزايدية على المجال $[-1,0]$

لدينا g تناقصية على $[-1,0]$ و $g([-1,0]) = [0;1]$

و h تناقصية على $[0,1]$

إذن f تزايدية على المجال $[-1,0]$.

التمرين الثالث

1 -

أ - لدينا P_1 : "$(\forall x \in \mathbb{R})\ x+\frac{1}{x} \geq 2$ أو $x \leq 0$"

إذن $\overline{P_1}$: "$(\exists x \in \mathbb{R})\ x+\frac{1}{x} < 2$ و $x > 0$"

ولدينا P_2 : "$(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$"

$\overline{P_2}$: "$(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \in \mathbb{Z}$ و $x \notin \mathbb{Z}$"

ب - الاستلزام المضاد للعكس :

$(\exists x \in \mathbb{R})\ x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 \notin \mathbb{Z}$.

2 - نبين بالترجع $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 1+5+9+\dots+(4n-3) = n(2n-1)$

لدينا من أجل $n = 1$ $1 = 2-1 = 1$ هذا صحيح

لنفترض $1+5+9+\dots(4n-3) = n(2n-1)$ و نبين $1+5+9\dots+(4n+1) = (n+1)(2n+1)$

لدينا $1+5+9+\dots+(4n+1) = \underbrace{1+5+9+\dots+(4n-3)} + (4n+1)$

$$= n(2n-1) + 4n + 1$$
$$= 2n^2 - n + 4n + 1$$
$$= 2n^2 + 3n + 1$$
$$= 2(n+1)(n+\tfrac{1}{2}) = (n+1)(2n+1) \text{ cqfd}$$

$\Leftarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 1+5+9+\dots(4n-3) = n(2n-1)$