

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

1, اعط نفي العبارة (P₁): $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}^+ y^2 \geq x$

(P₂): $x^2 + y = y^2 + x \Rightarrow (x = y \text{ ou } x + y = 1)$

2, بين أن العبارة (P₂) صحيحة

3, بين بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1+3+5+\dots+(2n+1) = (n+1)^2$

4, مستعملا الاستدلال بفصل الحالات بين أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{4x^2+3} \geq 2x$

تمرين 2 : نعتبر الدالة: $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$

1, حدد Df

2, بين أن الدالة f تقبل قيمة قصوى في النقطة 1

3, أ) بين أن: $\forall x \in Df \quad f(x) = -f(1-x) + \frac{1}{x^2 - x + 1}$

ب) استنتج أن: $\forall x \in Df \quad f(x) > -1$

تمرين 3 :

نعتبر الدالتين: $f(x) = x^2 - x$ و $g(x) = \sqrt{x}$ و المستقيم $(\Delta): y = -2x + 2$

1, حدد Dg و اعط جدول تغيراتها

2, اعط جدول تغيرات الدالة f

3, حدد نقط تقاطع Cf مع محوري المعلم

4, أنشئ في نفس المعلم المنحنيين Cg و Cf و (Δ)

5, حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة: $\sqrt{x} + 2x - 2 = 0$

6, حدد جبريا إحداثيات نقط تقاطع Cf و (Δ)

7, حل مبيانيا المتراجة: $f(x) + 2x \geq 2$

8, حدد صور المجالات: $I = \left[0; \frac{1}{4}\right]$ و $J = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$ بالدالة g و صور $K = [2; +\infty[$ و $L =]-\infty; 0]$ بالدالة f

9, لتكن الدالة: $h(x) = f \circ g(x)$

أ- حدد h(x) و احسب مجموعة تعريفها

ب- حدد تغيرات الدالة h على كل من المجالين I و J

فروض النجاح استعدادا لاجتياز فروضك	مبادئ في المنطق - عموميات حول الدوال حلول مقترحة	السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية
فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان		
تمرين 1 :		
	$\neg(P_1): \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}^+ \quad y^2 < x$ $\neg(P_2): \quad x^2 + y = y^2 + x \text{ et } (x \neq y \text{ et } x + y \neq 1)$	1
	$x^2 + y = y^2 + x \Rightarrow x^2 - y^2 + y - x = 0 \Rightarrow (x - y)(x + y) - (x - y) = 0$ $\Rightarrow (x - y)[(x + y) - 1] = 0 \Rightarrow (x - y = 0 \text{ ou } x + y - 1 = 0) \Rightarrow (x = y \text{ ou } x + y = 1)$	2 لدينا :
	<p>▪ بالنسبة لـ $n = 0$ المتساوية صحيحة لأن: $1 = (0+1)^2$</p> <p>▪ نفترض أن $1+3+5+\dots+(2n+1) = (n+1)^2$ ونبين أن $1+3+5+\dots+(2(n+1)+1) = (n+2)^2$</p> $1+3+5+\dots+(2(n+1)+1) = 1+3+5+\dots+(2n+1) + (2(n+1)+1)$ $= (n+1)^2 + 2n + 2 + 1$ $= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3$ $= n^2 + 4n + 4$ $= (n+2)^2$	3 لدينا :
	<p>لنبين أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{4x^2 + 3} \geq 2x$</p> <p>▪ إذا كان $x \leq 0$ فإن المتفاوتة صحيحة لأن: $\sqrt{4x^2 + 3} \geq 0$</p> <p>▪ إذا كان $x > 0$</p> <p>فإن: $(\sqrt{4x^2 + 3})^2 - (2x)^2 = 4x^2 + 3 - 4x^2 = 3 > 0$ ، منه: $\sqrt{4x^2 + 3} \geq 2x$</p> <p>🌱 لانقارن المربعات حتى يكون للعديدين نفس الإشارة، وهذا ما استوجب دراسة الحالتين $x > 0$ و $x \leq 0$</p>	4
تمرين 2 : نعتبر الدالة: $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$		
	$Df = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x + 1 \neq 0\}$ <p>محددة الحدودية $x^2 - x + 1$ هي: $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$ ، إذن للحدودية نفس إشارة $a = 1$</p> <p>إذن فهي موجبة على \mathbb{R} ، أي أنها تخالف الصفر على \mathbb{R} ، بالتالي $Df = \mathbb{R}$</p> <p>🌱 أن تكون المحددة سالبة لا يعني أن الحدودية سالبة بل مرتبطة بإشارة a ، أما إذا كانت موجبة فإن ذلك سيستوجب دراسة الإشارة من خلال جدول الإشارات.</p>	1
	<p>لدينا: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - f(1) = \frac{x}{x^2 - x + 1} - 1 = \frac{x - x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x^2 - x + 1} = \frac{-(x^2 - 2x + 1)}{x^2 - x + 1} = \frac{-(x-1)^2}{x^2 - x + 1}$</p> <p>و بما أن $-(x-1)^2 \leq 0$ و $x^2 - x + 1 > 0$ (حسب السؤال السابق) فإن: $f(x) - f(1) \leq 0$</p> <p>منه: $\forall x \in Df \quad f(x) \leq f(1)$ بالتالي الدالة f تقبل قيمة قصوى في النقطة 1</p>	2
	$\forall x \in \mathbb{R} \quad -f(1-x) + \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{-(1-x)}{(1-x)^2 - (1-x) + 1} + \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{-1+x}{1-2x+x^2-1+x+1} + \frac{1}{x^2 - x + 1}$ $= \frac{-1+x}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{x}{x^2 - x + 1} = f(x)$	3 أ
🌱 يجب دائما البدئ بالطرف الذي يمكن إجراء حسابات عليه كالنشر و توحيد المقام...		

لدينا حسب السؤال الثاني $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 1$ ، إذن ، $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(1-x) \leq 1$

منه : $\forall x \in \mathbb{R} \quad -f(1-x) \geq -1$ و بما أن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{x^2 - x + 1} > 0$

ب فإن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad -f(1-x) + \frac{1}{x^2 - x + 1} > -1$ بالتالي $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > -1$

وجود المكتم الكوني \forall في عبارة يعني إمكانية التعويض بأي قيمة أو تعبير يحقق شرط العبارة، بمعنى أنه لكون $1-x \in \mathbb{R}$ فإننا نستطيع إستبداله ب x في العبارة الأصلية.

تمرين 3 : $f(x) = x^2 - x$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ ، $(\Delta): y = -2x + 2$

$$Dg = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = [0; +\infty[$$

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0	

1

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$		$-\frac{1}{4}$	

f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية
إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{4} \quad , \quad \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$$

2

لنحدد نقط تقاطع Cf مع محوري المعلم

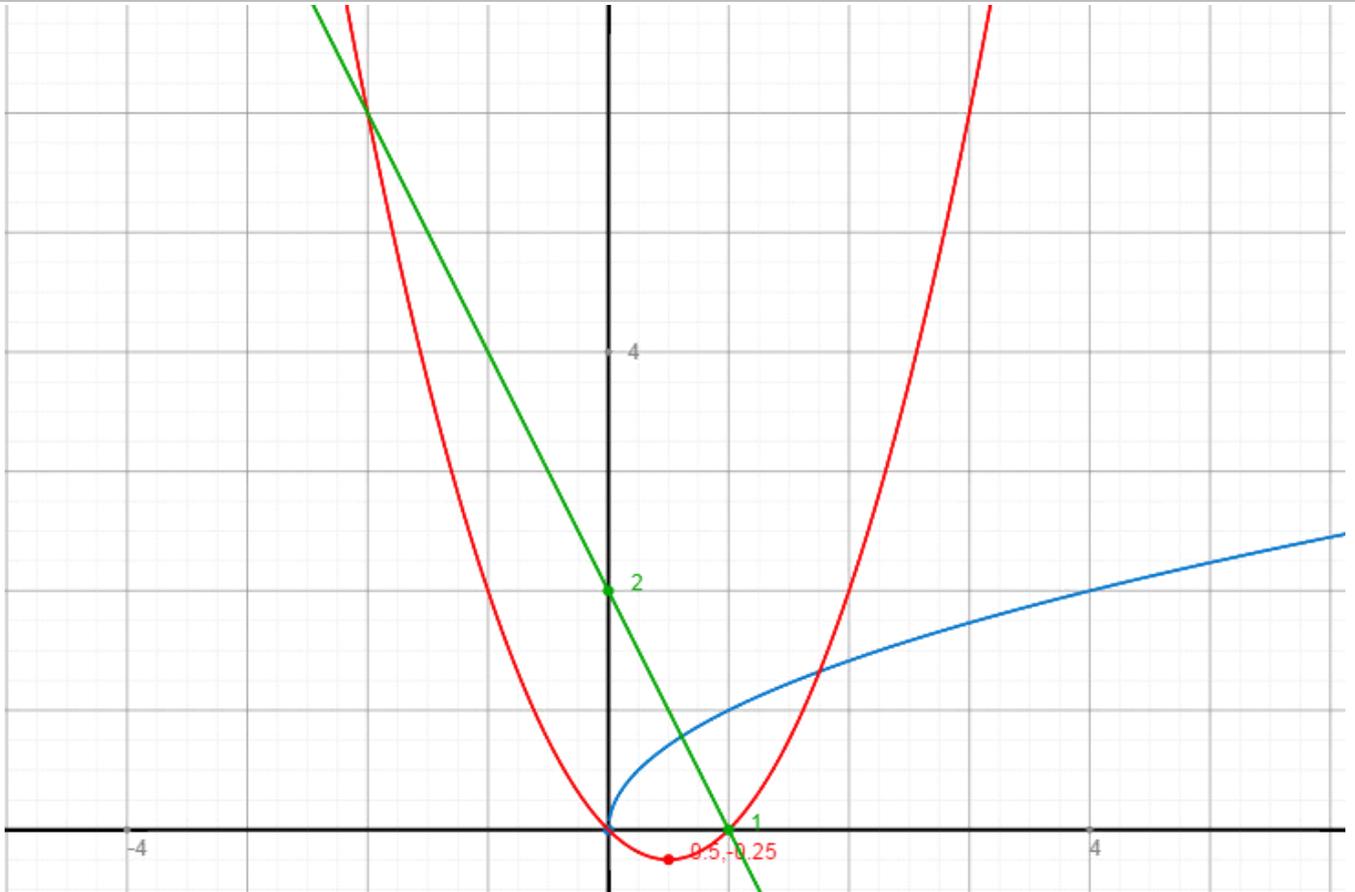
من أجل ذلك نحل المعادلة : $x=0$ ou $x=1$ $\Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow f(x)=0$

إذن Cf يقطع محور الأفاصيل في النقطتين : $A(0,0)$ و $B(1,0)$

وبما أن $f(0)=0$ فإن Cf يقطع محور الأرتيب في النقطة : $A(0,0)$

3

دائما لتحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل نحل المعادلة $f(x)=0$ و مع الأرتيب نحسب $f(0)$



4

	<p>المعادلة: $\sqrt{x} + 2x - 2 = 0$ تكافئ $\sqrt{x} = -2x + 2$</p> <p>إذن لمعرفة عدد حلولها مبيانيا نبحت عن عدد نقط تقاطع منحيي الدالة g و (Δ) ونجد أن هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا (تقاطع اللونين الأزرق والأخضر)</p>	5
	<p>طلب منا في هذا السؤال فقط عدد الحلول وليس تحديد هذه الحلول، في تلك الحالة سيكون علينا البحث عن أفاصيل نقط التقاطع مما سيتطلب أن يكون تمثيلنا المبياني دقيقا.</p>	
	<p>لنحدد جبريا إحداثيات نقط تقاطع Cf و (Δ)</p> <p>لنحل المعادلة: $f(x) = -2x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x = -2x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$</p> <p>$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ و $x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$ منه $\Delta = 1 + 8 = 9$</p> <p>بالتالي Cf و (Δ) يتقاطعان في النقطتين: $E(1; 0)$ و $F(-2; 6)$</p>	6
	<p>حل مبيانيا المتراجحة: $f(x) + 2x \geq 2$</p> <p>المتراجحة تكافئ $f(x) \geq -2x + 2$، إذن سنبحث عن المجال الذي يكون فيه منحنى الدالة f فوق منحنى المستقيم (Δ)، ونجد: $S =]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$</p>	7
	<p>$f(]-\infty; 0]) = [0; +\infty[$ ، $f([2; +\infty[) = [2; +\infty[$ ، $g\left(\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)\right) = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ ، $g\left(\left[0; \frac{1}{4}\right]\right) = \left[0; \frac{1}{2}\right]$</p>	8
<p>استعملنا التمثيل المبياني للدالتين f و g لتحديد صور المجالات المطلوبة</p>		
	<p>$Dh = [0; +\infty[$: منه $h(x) = f \circ g(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} = x - \sqrt{x}$</p>	أ
	<p>يجب تحديد مجموعة تعريف المركب قبل التبسيط، بمعنى أننا وجدنا مجموعة التعريف انطلاقا من $x - \sqrt{x}$ وليس من $(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x}$</p>	
	<p>نعلم أن g تزايدية على $I = \left[0; \frac{1}{4}\right]$ و $g(I) = \left[0; \frac{1}{2}\right]$</p> <p>وبما أن f تناقصية على $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ فإن h تناقصية على I</p> <p>نعلم g تزايدية على $J = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$ و $g(J) = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$</p> <p>وبما أن f تزايدية على $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ فإن h تزايدية على I</p>	9 ب