

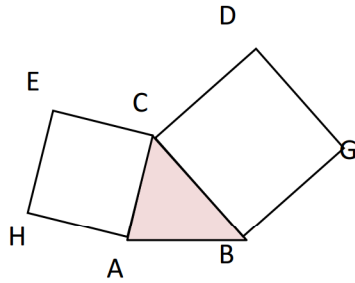
1.5 ن

0.5 ن

1 ن

1.5 ن

1 ن



1.5 ن

1 ن

1.5 ن

التمرين الأول: (5.5 نقط)

نعتبر المثلث ABC (انظر الشكل جانبه) ABC

1) احسب $\cos \hat{BAC}$ ثم $\sin \hat{BAC}$

2) بين أن: $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 1$

3) نقطة D من المستوى بحيث: $\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{6}\overline{AC}$

أ) احسب: $\overline{AD} \cdot \overline{AC}$

ب) بين أن: $(AC) \perp (DB)$

4) لتكن I منتصف القطعة $[BC]$. احسب المسافة: AI

التمرين الثاني: (4 نقط)

ABC مثلث . ننشئ خارجه مربعين (انظر الشكل)

1) بين أن: $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = -\overline{CD} \cdot \overline{CE}$

2) بين أن: $(EB) \perp (AD)$

3) بين أن: $AD = EB$

التمرين الثالث: (7 نقط)

نعتبر الدالتين: $f(x) = x^2 - 2x - 3$ و $g(x) = \frac{-x-7}{x+1}$

1) حل في \mathbb{R} المعادلة: $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ (لاحظ أن 1 حل خاص للمعادلة)

2) بين أنه لكل $x \neq -1$ لدينا: $f(x) = g(x)$ تكافئ: $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$

3) أنشئ منحنى كل من f و g في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(0; \vec{i}; \vec{j})$

4) حل مبيانيا المتراجحة: $f(x) \leq g(x)$

1.5 ن

1 ن

3 ن

1.5 ن

التمرين الرابع: (3.5 نقط)

نعتبر الدالة المعرفة بمايلي: $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

1) تحقق من أن الدالة f معرفة على \mathbb{R}

2) أ- بين أن الدالة f تزايدية على المجال $]-\infty; 0]$

ب- بين أن الدالة f تناقصية على المجال $[0; +\infty[$

3) ضع جدول تغيرات f على \mathbb{R}

4) بين أن الدالة f تقبل قيمة قصوى على \mathbb{R} حددها.

0.5 ن

0.75 ن

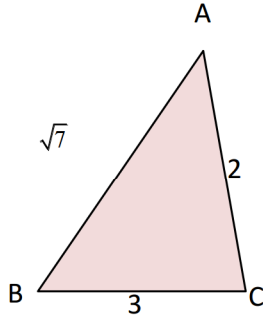
0.75 ن

0.5 ن

1 ن

التمرين الأول: (5.5 نقط)

نعتبر المثلث ABC (انظر الشكل جانبه)



1.5 ن

0.5 ن

1 ن

1.5 ن

1 ن

(1) احسب $\cos \hat{BAC}$ ثم $\sin \hat{BAC}$

(2) بين أن: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$

(3) D نقطة من المستوى بحيث: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

(أ) احسب: $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$

(ب) بين أن: $(AC) \perp (DB)$

(4) لتكن I منتصف القطعة $[BC]$. احسب المسافة: AI

حلول:

(1) حساب $\cos \hat{BAC}$ ثم $\sin \hat{BAC}$:

لدينا حسب مبرهنة الكاشي في المثلث ABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \times \cos \hat{BAC}$$

إذن

$$\cos \hat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC}$$

$$= \frac{\sqrt{7}^2 + 2^2 - 3^2}{2 \times \sqrt{7} \times 2}$$

$$= \frac{7 + 4 - 9}{4\sqrt{7}}$$

$$= \frac{2}{4\sqrt{7}}$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{14}$$

(2) لنبين أن: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{BAC}$$

$$= 2\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{7}}{14}$$

نعلم أن:

$$= \frac{14}{14} = 1$$

(3)

استنتاج: $\sin \hat{BAC}$

نعلم أن: $\sin^2 \hat{BAC} + \cos^2 \hat{BAC} = 1$

إذن: $\sin^2 \hat{BAC} = 1 - \cos^2 \hat{BAC}$

وبالتالي:

$$\sin \hat{BAC} = \sqrt{1 - \cos^2 \hat{BAC}} \text{ ou } -\sqrt{1 - \cos^2 \hat{BAC}}$$

وحيث أن قياسات زوايا مثلث لا تتعدى 180 درجة فإن:

$$\sin \hat{BAC} \geq 0$$

$$\sin \hat{BAC} = \sqrt{1 - \cos^2 \hat{BAC}}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{14}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{28}}$$

$$= \sqrt{\frac{27}{28}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

$$= \frac{3\sqrt{21}}{14}$$

وأخيرا:

ب -

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= -1 + 1$$

$$= 0$$

وبالتالي: $(AC) \perp (DB)$

أ -

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}^2$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}^2$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot 4$$

$$= 1$$

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2} \quad \text{حسب مبرهنة المتوسط فان:}$$

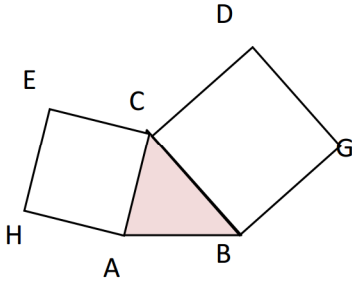
$$AI^2 = \frac{AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}}{2} \quad \text{ومنه:}$$

$$AI = \sqrt{\frac{AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{7^2 + 2^2} - \frac{9}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{2}$$

**التمرين الثاني: (4 نقطة)**

ABC مثلث . ننشئ خارجه مربعين (انظر الشكل)

1.5 ن $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = -\overline{CD} \cdot \overline{CE}$ بين أن:

1.5 ن $(EB) \perp (AD)$ بين أن:

1.5 ن $AD = EB$ بين أن:

حلول:

(1) لدينا:

$$\begin{aligned} \overline{CA} \cdot \overline{CB} &= CA \times CB \times \cos \hat{BCA} \\ &= CD \times CE \times \cos(180^\circ - \hat{DCE}) \\ &= -CD \times CE \times \cos(\hat{DCE}) \\ &= -\overline{CD} \cdot \overline{CE} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \hat{ACB} + \hat{BCD} + \hat{DCE} + \hat{ECA} &= 360^\circ \\ 180^\circ + \hat{ACB} + \hat{DCE} &= 360^\circ \\ \hat{ACB} + \hat{DCE} &= 180^\circ \\ \hat{ACB} &= 180^\circ - \hat{DCE} \end{aligned}$$

(3) حسب مبرهنة الكاشي في المثلثين: ADC و EBC لدينا:

$$\begin{aligned} AD^2 &= CA^2 + CD^2 - 2CA \times CD \cos \hat{ACD} \\ &= CE^2 + CB^2 - 2CE \times CB \cos(90^\circ + \hat{ACB}) \\ &= CE^2 + CB^2 - 2CE \times CB \cos(\hat{ECB}) \\ &= EB^2 \end{aligned}$$

$$AD^2 = EB^2$$

$$AD = EB$$

$$\begin{aligned} \overline{EB} \cdot \overline{AD} &= (\overline{EC} + \overline{CB}) \cdot (\overline{AC} + \overline{CD}) \\ &= \overline{EC} \cdot \overline{AC} + \overline{EC} \cdot \overline{CD} + \overline{CB} \cdot \overline{AC} + \overline{CB} \cdot \overline{CD} \\ &= 0 - \overline{CE} \cdot \overline{CD} + \overline{CB} \cdot \overline{AC} + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2)

التمرين الثالث: (7 نقطة)

نعتبر الدالتين: $f(x) = x^2 - 2x - 3$ و $g(x) = \frac{-x-7}{x+1}$

- 1.5 ن حل في \mathbb{R} المعادلة: $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ (لاحظ أن 1 حل خاص للمعادلة)
- 1 ن بين أنه لكل $x \neq -1$ لدينا: $f(x) = g(x)$ تكافئ: $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$
- 3 ن أنشئ منحنى كل من f و g في نفس المعلم المتعامد المنظم $(0; \vec{i}; \vec{j})$
- 1.5 ن حل مبيانيا المترابطة: $f(x) \leq g(x)$

حلول:

$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ \underline{x^3 - x^2} \\ -4x + 4 \\ \underline{-4x + 4} \\ 0 + 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} x - 1 \\ \hline x^2 - 4 \end{array}$
---	--

(1) بما أن 1 حل خاص للمعادلة فإن الحدودية تقبل القسمة على $x - 1$ فإن:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \text{تعني:}$$

$$(x - 1)(x^2 - 4) = 0$$

$$x - 1 = 0; \text{ou}; x^2 - 4 = 0$$

$$x = 1; \text{ou}; x = 2; \text{ou}; x = -2 \quad \text{لكل } x \neq -1 \quad (2)$$

$$f(x) = g(x)$$

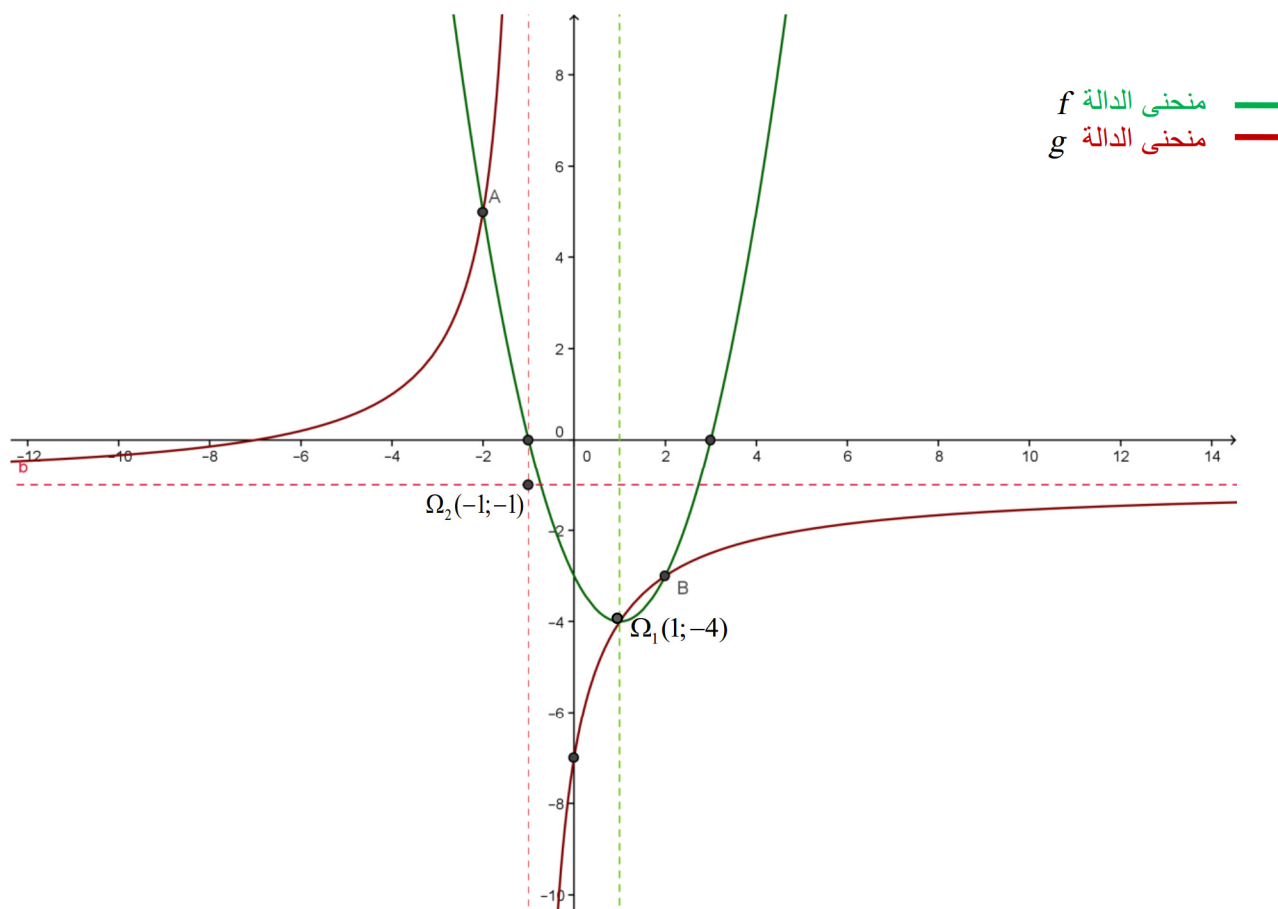
$$\frac{-x - 7}{x + 1} = x^2 - 2x - 3$$

$$(x + 1)(x^2 - 2x - 3) = -x - 7$$

$$x^3 - 2x^2 - 3x + x^2 - 2x - 3 = -x - 7$$

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$

(3) منحنى الدالة f شلجم رأسه $\Omega_1(1; -4)$ ومحور تماثله المستقيم ذو المعادلة: $x = 1$ ومنحنى الدالة g هذلول مركزه $\Omega_2(-1; -1)$ ومعادلتا مقاربييه هما: $x = -1$ و $y = -1$



(4) حلول المتراجحة: $f(x) \leq g(x)$ مبيانيا هي أفاصيل النقط التي يكون فيها منحنى f أسفل منحنى g
 $s = [-2; -1[\cup [1; 2]$

التمرين الرابع: (3.5 نقطة)

نعتبر الدالة المعرفة بمايلي: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

- 0.5 ن (1) تحقق من أن الدالة f معرفة على \mathbb{R}
- 0.75 ن (2) أ- بين أن الدالة f تزايدية على المجال $]-\infty; 0]$
ب- بين أن الدالة f تناقصية على المجال $[0; +\infty[$
- 0.5 ن (3) ضع جدول تغيرات f على \mathbb{R}
- 1 ن (4) بين أن الدالة f تقبل قيمة قصوى على \mathbb{R} حددها.

حلول:

- (1) بما أن لكل x من \mathbb{R} : $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ فإن f معرفة على \mathbb{R}
- (2) ليكن x_1 و x_2 عنصرين **مختلفين** من \mathbb{R} بحيث $x_1 < x_2$

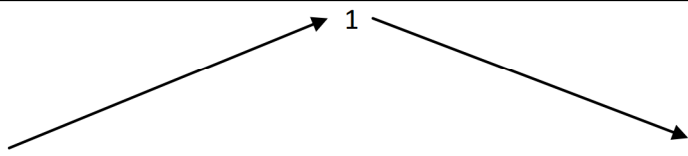
أ - لنبين أن $f(x_1) < f(x_2)$ على $]-\infty; 0]$
ب- لنبين أن $f(x_1) > f(x_2)$ على $[0; +\infty[$

$x_1 > x_2 > 0$ $x_1^2 > x_2^2$ $x_1^2 + 1 < x_2^2 + 1$ $\frac{1}{x_1^2 + 1} > \frac{1}{x_2^2 + 1}$ $f(x_1) > f(x_2)$	$x_1 < x_2 < 0$ $x_1^2 > x_2^2$ $x_1^2 + 1 > x_2^2 + 1$ $\frac{1}{x_1^2 + 1} < \frac{1}{x_2^2 + 1}$ $f(x_1) < f(x_2)$
---	---

إذن f تناقصية قطعاً على المجال $[0; +\infty[$

إذن f تزايدية قطعاً على المجال $]-\infty; 0]$

(3) جدول تغيرات f على \mathbb{R} :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

(4) بما أن f تزايدية على المجال $]-\infty; 0]$ و تناقصية على المجال $[0; +\infty[$ فإنها تقبل قيمة قصوى عند 0 وهي $f(0) = 1$